CVIČENIE 3.

Parciálna derivácia.

Definícia. Nech $f : A \subseteq R^2 \to R$, a nech $[x_0, y_0] \in A$. Nech parciálna funkcia $f(x, y_0)$ jednej premennej x je diferencovateľná v bode x_0.

Číslo
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f'(x, y_0)|_{x=x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$
nazývame parciálna derivácia funkcie f podľa premennej x v bode $[x_0, y_0]$.

Použitím definície vypočítajte parciálnu deriváciu funkcie $f(x, y)$ podľa premennej x v bode a a tiež podľa premennej y v bode a ak

1. $f(x, y) = x^2 y, \quad a = [2, 3]$
1.5 $f(x, y) = e^{x+2y} y, \quad a = [0, 1]$

Definícia. Nech $f : A \subseteq R^2 \to R$. Ak je funkcia f diferencovateľná podľa premennej x v každom bode $[x_0, y_0] \in B \subseteq A$, tak funkciu $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) : B \to R$ (dvoch premenných) voláme parciálna derivácia funkcie f podľa premennej x.

Vypočítajte parciálne derivácie podľa jednotlivých premenných a určte ich definičný obor.
2. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y}$.
3. $f(x, y, z) = 2 \sin xy^2 z$.
4. $f(x, y) = yx^{\frac{1}{3}}$.
5. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$
6. $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$
7. Vypočítajte parciálnu deriváciu funkcie $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ podľa premennej x v bode $(1, 2)$. Napíšte rovnicu dotykovej priamky ku grafu funkcie f, ktorá prechádza bodom $(1, 2, \frac{1}{\sqrt{5}})$ a leží v rovine rovnobežnej so súradnicovou rovinou O_{xz}. (Návod: Je to tiež dotyčnica ku grafu funkcie $f(x, 2)$.)

8. Napíšte rovnice dotykových priamok p_1, a p_2 ku grafu funkcie $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ ktoré prechdzajú bodom $(2, 1, 6)$ a ležia v rovinách rovnobežných so súradnicovými rovinami O_{xz}, O_{yz}.
Napíšte rovnicu roviny určenej priamkami p_1 a p_2.

Dotyková rovina a diferencovateľnosť. Diferenciál.

Ak $f : A \subseteq R^2 \to R$ je diferencovateľná funkcia, tak rovnica
$$z - z_0 = l_1(x - x_0) + l_2(y - y_0)$$
v ktorej $z_0 = f(x_0, y_0)$, $l_1 = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $l_2 = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$, je rovnica dotykovej roviny ku grafu funkcie f v bode $A = [x_0, y_0, z_0 = f(x_0, y_0)]$.

Výraz

$$df(x_0, y_0, x, y) = l_1(x - x_0) + l_2(y - y_0)$$

nazývame prvý diferenciál funkcie f v bode $[x_0, y_0]$.

Napíšte rovnicu dotykovej roviny a prvý diferenciál funkcie f v bode a.

9. $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad a = (2,1)$
10. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + xy \qquad a = (4,-3)$
11. $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{x+y} \qquad a = (1,1)$
12. $f(x,y) = e^{2x+y^2} \qquad a = (2,1)$

Napíšte prvý diferenciál funkcie f v bode a.

13. $f(x,y,z) = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{x} \qquad a = (1,2,3)$

14*. Napíšte rovnicu dotykovej roviny ku ploche danej rovnosťou $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ v bode $a = (1, ?, 1)$.

15*. Napíšte rovnicu dotykovej roviny ku ploche danej rovnosťou $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ v takom bode a, aby dotyková rovina bola rovnobežná s rovinou $x + y + z = 1$.

Definícia. Nech $f : A \subseteq R^2 \to R$, nech $[x_0, y_0] \in A$ a nech $l_1 = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $l_2 = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$. Hovoríme, že funkcia f je diferencovateľná v bode $[x_0, y_0]$ ak

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - l_1(x-x_0) - l_2(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0.$$

Zistite, či je daná funkcia diferencovateľná v bode a a napíšte jej diferenciál a dotykovú rovinu, ak existujú.

16. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad a = (0,0)$
17. $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3} \qquad a = (0,0)$
18. $f(x,y) = \sqrt[3]{xy} \qquad a = (0,0)$
19. $f(x,y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad a = (0,0)$
20. $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\cos\frac{1}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad a = (0,0)$

Výsledky

1. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(2,3) = 12, \quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(2,3) = 4 \qquad$ 1.5 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,1) = e^2, \quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,1) = 3e^2$
2. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{x}{(x^2+y)^{\frac{1}{2}}} \qquad \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{1}{2\,(x^2+y)^{\frac{1}{2}}}$
3. $f'_x(x,y,z) = 2\cos(xy^2z)y^2z$, $f'_y(x,y,z) = 2\cos(xy^2z)2xyz$, $f'_z(x,y,z) = 2\cos(xy^2z)xy^2$
4. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}y \ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^{\frac{1}{3}}$

5. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3-x^2y}{(x^2+y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-xy^2}{(x^2+y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

6. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} x^2(x^3+y^3)^{\frac{-2}{3}} & \text{ak } y \neq -x \\ 1 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} y^2(x^3+y^3)^{\frac{-2}{3}} & \text{ak } y \neq -x \\ 1 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Derivácie neexistujú v bodoch $[x, -x]$.

7. $z - \frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}^3}(x-1)$
8. $z - 6 = 4(x-2) + 4(y-1)$
9. $z - \frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{2}{\sqrt{5}^3}(x-2) - \frac{1}{\sqrt{5}^3}(y-1)$
10. $z + 7 = -\frac{11}{5}(x-4) + \frac{17}{5}(y+3)$
11. $z - 1 = \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{2}(y-1)$
12. $z - e^5 = 2e^5(x-2) + 2e^5(y-1)$
13. $df = -\frac{5}{2}(x-1) + \frac{1}{12}(y-2) + \frac{7}{9}(z-3)$
14. $z - 1 = -(x-1) - \frac{2}{(}y - \frac{2}{)}$, $\qquad z - 1 = -(x-1) + \frac{2}{(}y + \frac{2}{)}$
16. nie je diferencovateľná v bode $[0,0]$
17. nie je diferencovateľná v bode $[0,0]$
18. nie je diferencovateľná v bode $[0,0]$
19. $z = 0$ $\qquad$ 20. $z = 0$