

CVIČENIE 2.

Limita a spojitosť.

Definícia. Nech $f : A \subseteq R^n \rightarrow R$, a nech \bar{x}_0 je hromadný bod množiny A . Hovoríme, že funkcia f má v bode \bar{x}_0 limitu $L \in R^*$, ak:

$\forall O_\varepsilon(L) \exists O_\delta^\circ(\bar{x}_0)$, také, že $\bar{x} \in O_\delta^\circ(\bar{x}_0) \Rightarrow f(\bar{x}) \in O_\varepsilon(L)$. Značíme:

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} f(\bar{x}) = L.$$

Vypočítajte limitu funkcie

1. $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,3)} 2x + 3y.$
2. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}.$
3. $\lim_{(x,y) \rightarrow (-2,1)} \frac{(2x + y)^2 - 9}{4xy + 2y^2 + 6y}.$

Veta. Nech $A \subseteq R^n$ a nech $f : A \rightarrow R, g : A \rightarrow R, h : A \rightarrow R$, pričom $f(\bar{x}) \leq g(\bar{x}) \leq h(\bar{x})$.

Nech existujú limity $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} f(\bar{x}) = \lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} h(\bar{x}) = L$.

Potom aj $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} g(\bar{x}) = L$.

4. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x \sin \frac{1}{y}.$
5. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\tan xy}{x}.$
6. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2}.$
- 6.1. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}.$

Veta. Nech $A \subseteq R^n$ a nech $f : A \rightarrow R$. Nech existuje limita $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} f(\bar{x}) = L$.

Nech $\varphi(t) : [0, T] \rightarrow R^n$ je spojitá funkcia a $\varphi(0) = \bar{x}_0$.

Potom aj limita funkcie jednej premennej

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(\varphi(t)) = L.$$

Poznámka. Nech $A \subseteq R^n$ a nech $f : A \rightarrow R$.

Ak $\varphi_1(t), \varphi_2(t) : [0, T] \rightarrow R^n$ sú spojité funkcie, $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \bar{x}_0$ a

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(\varphi_1(t)) \neq \lim_{t \rightarrow 0} f(\varphi_2(t)),$$

tak

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} f(\bar{x}) \text{ neexistuje.}$$

Zistite, či existuje limita

$$7. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

$$8. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+y}{x-y}.$$

$$9. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{y}.$$

$$10. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}.$$

$$11. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 - y^2}.$$

$$12. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^{\frac{3}{2}} y}{x^2 + y^2}.$$

Definícia. Nech $A \subseteq \mathbb{R}^n$ a nech $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, a nech $\bar{x}_0 \in A$. Hovoríme, že funkcia f je v bode \bar{x}_0 spojitá, ak

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} f(\bar{x}) = f(\bar{x}_0).$$

Zistite, či je v bode $[0, 0]$ spojitá funkcia

$$13. f(x, y) = \begin{cases} \frac{2 - \sqrt{4 - (x^2 + y^2)}}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ \frac{1}{4} & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

$$14. f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

$$15. f(x, y) = \begin{cases} \cos \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

16. Dodefinujte funkciu f tak, aby bola spojitá v každom bode

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin xy}{y} & (x, y) \neq (x, 0) \\ ? & (x, y) = (x, 0). \end{cases}$$

Výsledky

1. 11 2. 2 3. -3 4. 0 5. 0 6. 0
 7. až 11. limita neexistuje 12. 0 13. je spojitá 14. nie je spojitá
 15. je spojitá 16. x