Periodické funkcie

Def. Funkciu $f \subseteq R \times R$ nazývame <u>periodickou s periodou $T>0$</u> ak T je najmenšie kladné číslo pre ktoré $f(x+T) = f(x)$ pre všetky $x \in R$

<u>vlastnosti</u>: $f(x+kT) = f(x)$ pre všetky $x \in R$ a všetky $k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$

ak f je po čiastkach spojitá potom $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$ pre ľubovoľné $a \in R$

- <u>Nech $T>0$</u>. Pre všetky $x \in R$ platí:

$$\sin \frac{2\pi n(x+T)}{T} = \sin \frac{2\pi n x}{T}$$

$$\cos \frac{2\pi n(x+T)}{T} = \cos \frac{2\pi n x}{T}$$

sú periodické s periodou $T>0$

$$\left(\text{pretože: } \frac{2\pi n(x+T)}{T} = \frac{2\pi n x + 2\pi n T}{T} = \frac{2\pi n x}{T} + 2\pi \right)$$

- <u>Nech $T>0$</u>. $p, q = 0, 1, 2, \ldots$; $a \in R$

(a) $$\int_a^{a+T} \sin \frac{2\pi p x}{T} \cos \frac{2\pi q x}{T} dx = 0$$

(b) $$\int_a^{a+T} \sin \frac{2\pi p x}{T} \sin \frac{2\pi q x}{T} dx = \begin{cases} 0, \text{ pre } p \neq q \\ \frac{T}{2}, \text{ pre } p = q > 0 \\ (0, \text{ pre } p = q = 0) \end{cases}$$

(c) $$\int_a^{a+T} \cos\frac{2\pi p x}{T}\cos\frac{2\pi q x}{T}\,dx = \begin{cases} 0, & \text{pre } p \neq q \\ \frac{T}{2}, & \text{pre } p = q > 0 \\ T, & \text{pre } p = q = 0 \end{cases}$$

(Na dôkaz použijeme vzorce:

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right)$$
$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right), \text{ atď.})$$

$\Downarrow$ systém funkcií:

$$M \begin{cases} 0, \sin\frac{2\pi x}{T}, \sin\frac{4\pi x}{T}, \sin\frac{6\pi x}{T}, \dots \\ 1, \cos\frac{2\pi x}{T}, \cos\frac{4\pi x}{T}, \cos\frac{6\pi x}{T}, \dots \end{cases}$$

je ortogonálny systém funkcií na intervale $\langle a, a+T \rangle$ pre ľubovoľné $a \in R$

t.j. pre ľubovoľné $f, g \in M$, $f \neq g$ platí:

$$\int_a^{a+T} f(x)\,g(x)\,dx = 0.$$

✓ $$\int_0^T \sin\frac{2\pi x}{T}\cos\frac{4\pi x}{T}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^T\left(\sin\left(\frac{2\pi x}{T}+\frac{4\pi x}{T}\right) + \sin\left(\frac{2\pi x}{T}-\frac{4\pi x}{T}\right)\right)dx = \frac{1}{2}\int_0^T\left(\sin\frac{6\pi x}{T} + \underbrace{\sin\frac{(-2)\pi x}{T}}_{=-\sin\frac{2\pi x}{T}}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{T}{6\pi}(-1)\cos\frac{6\pi x}{T} + \frac{T}{2\pi}\cos\frac{2\pi x}{T}\right]_0^T =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{T}{6\pi}\left(\underbrace{\cos 6\pi}_{1} - \underbrace{\cos 0}_{1}\right) + \frac{T}{2\pi}\left(\underbrace{\cos 2\pi}_{1} - \underbrace{\cos 0}_{1}\right)\right) = \frac{1}{2}\cdot 0 = \underline{\underline{0}}$$

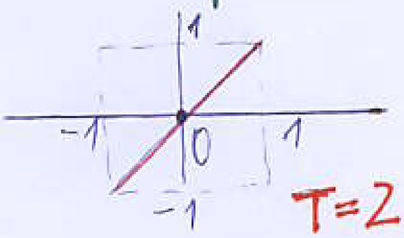
Normalizované periodické pokračovanie po čiastkach spojitej funkcie na $\langle a, a+T \rangle$

Nech $f \subseteq R \times R$ je po čiastkach spojitá funkcia na intervale $\langle a, a+T \rangle$. Funkciu

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left\{ \lim\limits_{t \to a+} f(t) + \lim\limits_{t \to (a+T)^-} f(t) \right\}, & \text{pre } x = a \\ \frac{1}{2}\left\{ \lim\limits_{t \to x+} f(t) + \lim\limits_{t \to x-} f(t) \right\}, & \text{pre } x \in (a, a+T) \\ \bar{f}(x+T) & \text{pre všetky } x \in R \end{cases}$$

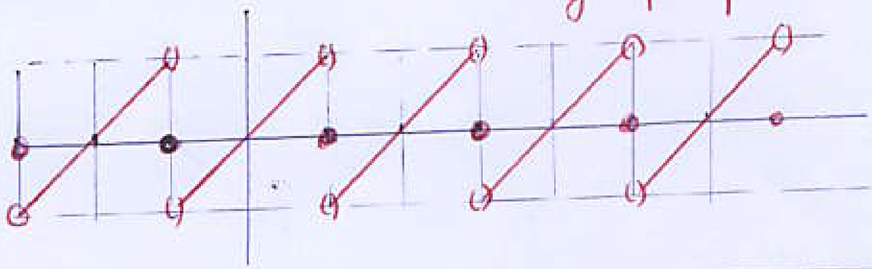
nazývame "**normalizovaným periodickým pokračovaním f pre $\langle a, a+T \rangle$**".

- $f(x) = x$, pre $\langle -1, 1 \rangle$ má n.p.p.

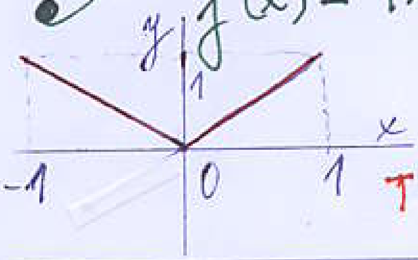


$T=2$

graf $\bar{f}$

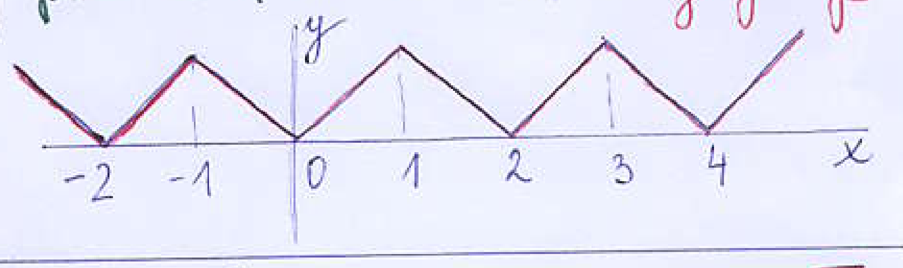


- $f(x) = |x|$, pre $\langle -1, 1 \rangle$ má n.p.p.

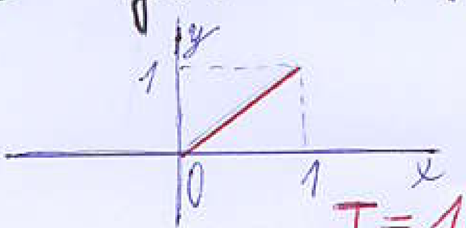


$T=2$

graf $\bar{f}$

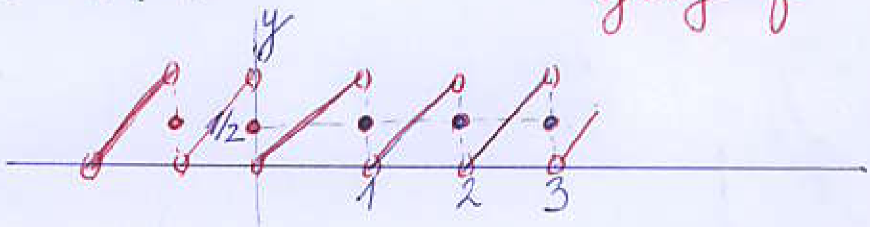


- $f(x) = x$, pre $\langle 0, 1 \rangle$



$T=1$

graf $\bar{f}$

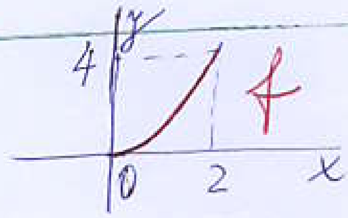


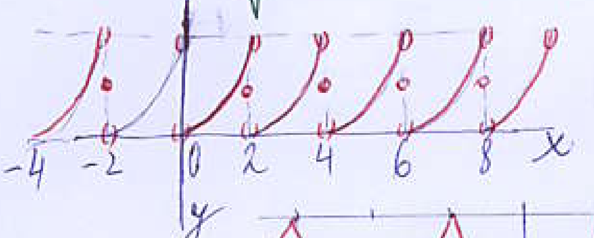
Párne a nepárne periodické pokračovanie funkcie f pre interval $\langle 0,a\rangle$

párne zostrojíme tak že doplníme (dodefinujeme) funkciu f na párnu na $\langle -a,a\rangle$ a z nej zostrojíme jej norm. per. pokr. pre $\langle -a,a\rangle$ (teda periodu $T = 2a$)

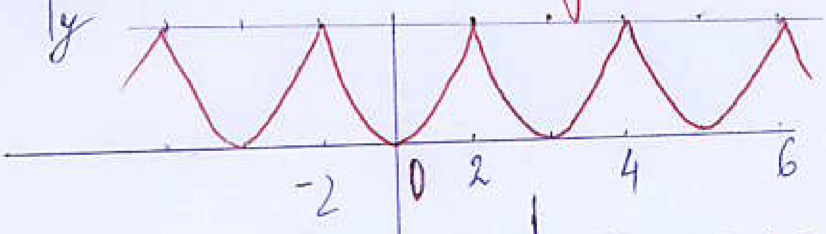
nepárne zostrojíme tak že doplníme (dodefinujeme) funkciu f na nepárnu na $\langle -a,a\rangle$ a z nej zostrojíme jej norm. per. pokr. pre $\langle -a,a\rangle$ (teda periodu $T=2a$)

✓ $f(x) = x^2$, $x \in \langle 0,2\rangle$

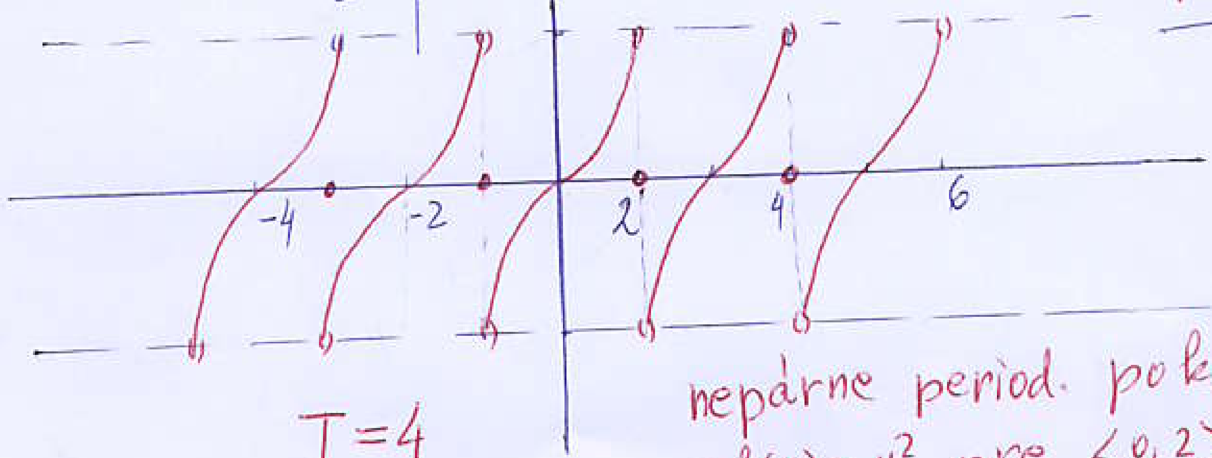




normalizované per. pokr. $f(x) = x^2$ pre $\langle 0,2\rangle$ $T=2$



párne period. pokr. $f(x)=x^2$ pre $\langle 0,2\rangle$ $T=4$



$T=4$

nepárne period. pokr. $f(x)=x^2$ pre $\langle 0,2\rangle$

Goniometrické rady s periodou $T>0$

Funkcionálny rad

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2\pi n x}{T}+b_n\sin\frac{2\pi n x}{T}\right) \quad (S)$$

kde $a_0, a_n, b_n \in R$ (sú koeficienty) nazývame goniometrickým radom s periodou $T>0$,

- ak $a_0=a_1=a_2=\dots=0$ sínusovým radom
- ak $b_1=b_2=b_3=\dots=0$ kosínusovým radom

vlastnosti:

(a) ak $M\subseteq R$ je množina tých čísel $x_0\in R$ pre ktoré číselný rad

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2\pi n x_0}{T}+b_n\sin\frac{2\pi n x_0}{T}\right)=s(x_0)$$

konverguje (M nazývame obor konvergencie (S)) potom

- $x_0\in M \Longleftrightarrow x_0+T\in M$
- $s(x_0+T)=s(x_0)$ pre každé $x_0\in M$
- ak súčet tohto radu je $s(x)$ pre každé $x\in M$ tak s je párna funkcia pre kosínusové rady a s je nepárna funkcia pre sínusové rady

(b) Nech funkcia f a jej prvá derivácia f' sú po čiastkach spojité na $\langle a, a+T \rangle$, kde $T>0$.

Nech pre $n = 0, 1, 2, \dots$ je:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(x) \cos \frac{2\pi n x}{T} \, dx \quad \left(t.j.\ a_0 = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(x)\,dx\right)$$

(**)

pre $n = 1, 2, 3, \dots$ je:

$$b_n = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(x) \sin \frac{2\pi n x}{T} \, dx$$

nech $\bar{f}$ je normalizované periodické pokračovanie funkcie f pre interval $\langle a, a+T \rangle$.

Potom

$$\bar{f}(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi n x}{T} + b_n \sin \frac{2\pi n x}{T} \right) \qquad (*)$$

pre každé $x \in R$.

Nekonečný (funkcionálny) goniometrický rad pre po čiastkach spojitú funkciu f na $\langle a, a+T \rangle$ tvaru

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi n x}{T} + b_n \sin \frac{2\pi n x}{T} \right)$$

v ktorom koeficienty $a_n = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(x) \cos \frac{2\pi n x}{T} \, dx$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ a $b_n = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(x) \sin \frac{2\pi n x}{T} \, dx$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ sa nazýva **Fourrierovým radom f pre interval $\langle a, a+T \rangle$** a a_n, b_n nazývame **Fourrierovými koeficientami f pre interval $\langle a, a+T \rangle$.**

Ak aj f' je po čiastkach spojitá na $\langle a, a+T \rangle$ tak jeho súčet je norm. per. pokračovanie $\bar{f}$ (pozri (*)).

Ak po čiastkach spojitá funkcia f na $\langle -\frac{T}{2}, \frac{T}{2} \rangle$ je <u>párna</u> a f' je po č. spojitá na $\langle -\frac{T}{2}, \frac{T}{2} \rangle$ potom jej Fourierove koeficienty (**) sú:

$$b_1 = b_2 = b_3 = \dots = 0$$

$$a_0 = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(x) \cos \frac{2\pi n x}{T}\,dx$$

a jej Fourierov rad (*) je kosínusový.

Ak po čiastkach spojitá funkcia f na $\langle -\frac{T}{2}, \frac{T}{2} \rangle$ je <u>nepárna</u> a f' je po čiastkach spojitá na $\langle -\frac{T}{2}, \frac{T}{2} \rangle$ potom jej Fourierove koeficienty (**) sú

$$a_0 = a_1 = a_2 = \dots = 0$$

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(x) \sin \frac{2\pi n x}{T}\,dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

a jej Fourierov rad (*) je sínusový.

Poznamenajme, že na dôkaz rovnosti (*), ktorú nazývame aj "**rozvojom funkcie do goniometrického radu**" sa okrem predpokladu že f a f' sú po čiastkach spojité na $\langle a, a+T \rangle$ (teda všetky integrály v (**) existujú) podstatne využíva fakt že množina funkcií

$$\left.\begin{array}{l} 1,\ \cos\frac{2\pi x}{T},\ \cos\frac{4\pi x}{T},\ \cos\frac{6\pi x}{T}, \dots \\ 0,\ \sin\frac{2\pi x}{T},\ \sin\frac{4\pi x}{T},\ \sin\frac{6\pi x}{T}, \dots \end{array}\right\} \mathcal{G}$$

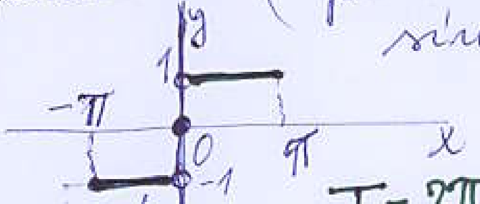
tvorí tzv. "ortogonálny systém funkcií" $\mathcal{G}$ t.j. pre každé 2 rôzne funkcie $f, g \in \mathcal{G}$ platí

$$\int_a^{a+T} f(x)\,g(x)\,dx = 0.$$

(8)

Najdime Fourrierov rad funkcie ("pravouhlý sínus")

$$f(x)=\begin{cases}-1, & \text{pre } x\in\langle-\pi,0)\\ 0, & \text{pre } x=0\\ 1, & \text{pre } x\in(0,\pi\rangle\end{cases}$$



$T=2\pi$

a nakreslime graf jeho súčtu.

Pre každé $x\in\langle-\pi,\pi\rangle$ platí $f(-x)=-f(x)\Rightarrow f$ je nepárna

teda bude: $a_0=a_1=a_2=a_3=\dots=0$

$$b_n=\frac{4}{2\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin\frac{2\pi n x}{2\pi}dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(nx)dx=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi}=-\frac{2}{\pi n}\left(\cos(n\pi)-\cos 0\right)=$$

$$=-\frac{2}{\pi n}\left((-1)^n-1\right)=\frac{2}{\pi n}\left(1-(-1)^n\right)$$

pretože $\boxed{\cos(n\pi)=(-1)^n}$ pre $n=1,2,3,\dots$

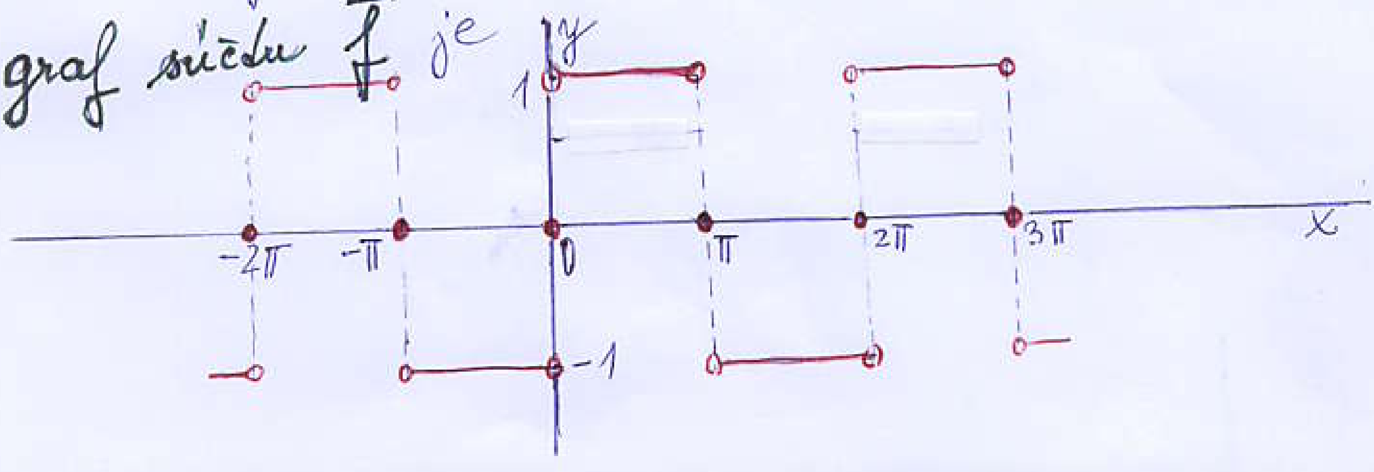
$(\cos\pi=-1,\ \cos 2\pi=1,\ \cos 3\pi-1,\ \cos 4\pi=1,\dots)$

teda $$\bar{f}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi n}\left(1-(-1)^n\right)\sin\frac{\cancel{2\pi} n x}{\cancel{2\pi}}$$

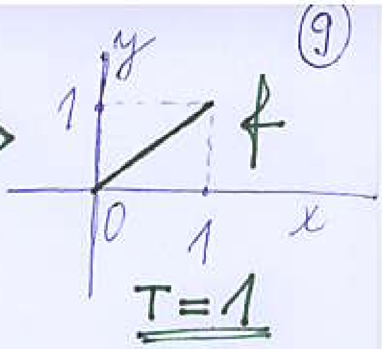
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4}{\pi(2n+1)}\sin\left((2n+1)x\right)$$

teda $$\bar{f}(x)=\frac{4}{\pi}\sin x+\frac{4}{3\pi}\sin 3x+\frac{4}{5\pi}\sin 5x+\dots$$

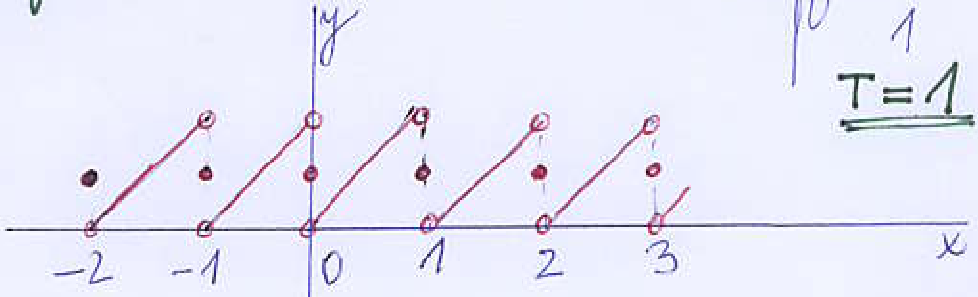
graf súčtu $\bar{f}$ je



✓ Nech $f(x) = x$, $x \in \langle 0, 1\rangle$



graf $\bar{f}$



Fourrierov rad f pre $\langle 0, 1\rangle$ | ($\bar{f}$ je graf jeho súčtu!)

$$a_0 = 2\int_0^1 x\,dx = 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \underline{\underline{1}}$$

$$a_n = 2\int_0^1 x\cos(2\pi n x)\,dx = 2\Big\{\underbrace{\left[x\,\frac{\sin(2\pi n x)}{2\pi n}\right]_0^1}_{=0} - \int_0^1 \frac{\sin(2\pi n x)}{2\pi n}\,dx\Big\} = 2\left[\frac{\cos(2\pi n x)}{4\pi^2 n^2}\right]_0^1 = \frac{2}{4\pi^2 n^2}(1-1) = \underline{\underline{0}}$$

pre $n = 1, 2, 3, \dots$

$$b_n = 2\int_0^1 x\sin(2\pi n x)\,dx = 2\Big\{\left[x(-1)\frac{\cos(2\pi n x)}{2\pi n}\right]_0^1 - \int_0^1 (-1)\frac{\cos(2\pi n x)}{2\pi n}\,dx\Big\} = 2\Big\{(-1)\frac{1}{2\pi n} + \left[\frac{\sin(2\pi n x)}{4\pi^2 n^2}\right]_0^1\Big\} =$$

$$= \underline{\underline{-\frac{1}{\pi n}}}$$ a teda:

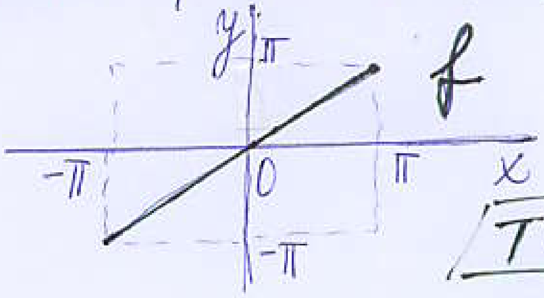
$$\boxed{\bar{f}(x) = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n}\sin(2\pi n x)}, \quad x \in (-\infty, \infty)$$

napr. pre $x = \frac{1}{4}$ dostaneme:

$$\bar{f}\left(\tfrac{1}{4}\right) = \boxed{\frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n}\sin\frac{\pi n}{2}} \implies$$

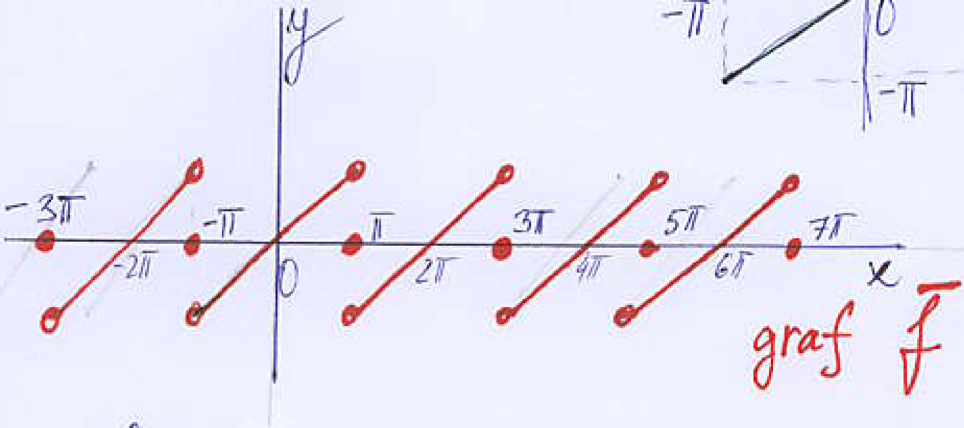
$$\implies \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sin\frac{\pi n}{2} = \frac{1}{4} \implies \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sin\frac{\pi n}{2} = \frac{\pi}{4}}$$

Nech $f(x) = x$, $x \in \langle -\pi, \pi \rangle$



$T = 2\pi$

f je nepárna



f je nepárna $\Rightarrow a_0 = a_1 = a_2 = \dots = 0$

$$b_n = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \sin\frac{2\pi n x}{2\pi}\,dx = \frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{2}_{1}\pi}\int_0^{\pi} x \sin\frac{\cancel{2\pi} n x}{\cancel{2\pi}}\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\left\{\left[x(-1)\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{\cos nx}{n}\,dx\right\} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left\{-\pi\frac{(-1)^n}{n} + \underbrace{\left[\frac{\sin nx}{n^2}\right]_0^{\pi}}_{=0}\right\} = (-2)\frac{(-1)^n}{n} = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}$$

$$\boxed{\bar{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}(-1)^{n+1}\sin(nx)}$$

napr. $\bar{f}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}(-1)^{n+1}\sin\left(\frac{n}{2}\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\left(\frac{n}{2}\right)$$

napr. $\bar{f}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}(-1)^{n+1}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$$