Vyšetrovanie funkcie $f \subseteq R^n \times R$ v jej stacionárnych bodoch

- Nech funkcia $f \subseteq R^n \times R$ má na nejakom okolí stacionárneho bodu $\bar{a}$ spojité všetky 2-hé parciálne derivácie a nech

$$D^2 f_{\bar{a}}(\bar{h}) = \sum_{j,k=1}^{n} \left[\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_j \partial x_k}\right]_{\bar{x}=\bar{a}} h_j h_k, \quad \bar{h}=(h_1,\dots,h_n)$$

potom:

(a) Ak $D^2 f_{\bar{a}}(\bar{h}) > 0$ pre všetky $\bar{h} \neq (0,0,\dots,0)$, potom f má v bode $\bar{a}$ ostré lokálne minimum.

(b) Ak $D^2 f_{\bar{a}}(\bar{h}) < 0$ pre všetky $\bar{h} \neq (0,0,\dots,0)$, potom f má v bode $\bar{a}$ ostré lokálne maximum.

(c) Ak existujú $\overline{h^{(1)}} \neq \overline{h^{(2)}}$ také že $\underbrace{D^2 f_{\bar{a}}(\overline{h^{(1)}})}\cdot\underbrace{D^2 f_{\bar{a}}(\overline{h^{(2)}})} < 0$ tak f má

(majú opačné znamienka)

v $\bar{a}$ sedlový bod (nemá v $\bar{a}$ lokálny extrém)

v príkladoch na strane 38:

- $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + 2z + x$, $\underbrace{\bar{a} = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -1\right)}$ jediný stacionárny bod f

  $D^2 f_{\bar{a}}(\bar{h}) > 0$ pre všetky $\bar{h} \neq (0,0,0)$

  $\Rightarrow f$ má v $\bar{a} = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -1\right)$ ostré lokálne minimum

- $f(x,y,z) = x^2 - y^2 - z^2$, $\bar{a} = (0,0,0)$ je jediný stac. bod f

$$D^2 f_{\bar{a}}(\bar{h}) = 2h_1^2 - 2h_2^2 - 2h_3^2 \begin{cases} > 0 \text{ pre } \overline{h^{(1)}} = (1,0,0) \\ < 0 \text{ pre } \overline{h^{(2)}} = (0,1,0) \end{cases}$$

f má v $\bar{a} = (0,0,0)$ sedlový bod.

Vyšetrovanie funkcie $f \subseteq R^2 \times R$ v jej stacionárnych bodoch

- Nech funkcia $f \subseteq R^2 \times R$ má na nejakom okolí stacionárneho bodu $\bar{a} = (a_1, a_2)$ spojité všetky parciálne derivácie druhého rádu. Nech

$$H_f(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}, & \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \, \partial x} \\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \, \partial y}, & \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \, \partial x} \right)^2$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \, \partial x} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \, \partial y}$$

lebo sú spojité

Potom:

(a) ak $H_f(a_1,a_2) > 0$ & $\left[\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} \right]_{\bar{x}=\bar{a}} < 0$

tak f má v $\bar{a}$ ostré lokálne maximum.

(b) ak $H_f(a_1,a_2) > 0$ & $\left[\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} \right]_{\bar{x}=\bar{a}} > 0$

tak f má v $\bar{a}$ ostre lokálne minimum.

(c) ak $H_f(a_1,a_2) < 0$ tak f má v $\bar{a}$ sedlový bod.

- poznámka: ak $H_f(a_1,a_2) = 0$ potom f môže ale nemusí mať v $\bar{a}$ lokálny extrém.

- $f(x,y) = x^2 y$; $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2x = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

Stacionárne body

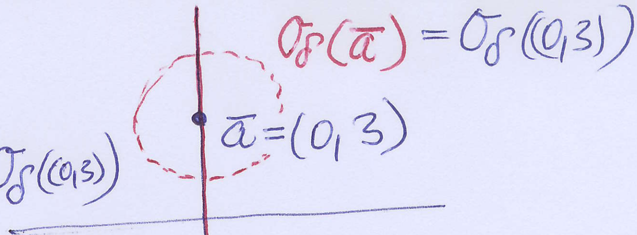
$$\left.\begin{array}{l} 2xy = 0 \\ x^2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 0 \\ y \in R \end{array}$$

$$H_f(x,y) = \begin{vmatrix} 2y, & 2x \\ 2x, & 0 \end{vmatrix} = -4x^2 \Rightarrow H_f(\bar{a}) = 0$$

vo všetkých stac. bodoch f

pokračovanie →

→ pokračovanie



$f(0,3)=0$ a existuje $O_\delta((0,3))$

že $f(x,y)=x^2y \geq 0$ pre $(x,y)\in O_\delta(0,3)$

$\Rightarrow f$ má v $\bar a=(0,3)$ lokálne minimum

$x=0, y\in R$ sú stacionárne body f

$f(0,-3)=0$ a existuje $O_\delta((0,-3))$ že $f(x,y)=x^2y \leq 0$ pre všetky $(x,y)\in O_\delta((0,-3)) \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ má v $\bar a=(0,-3)$ lokálne maximum.

$f(0,0)=0$ ale v každom okolí $O_\delta((0,0))$ existujú body $(x,y)\in O_\delta((0,0))$ že $f(x,y)>0$ aj body $(x,y)\in O_\delta(0,0)$ že $f(x,y)<0$. Teda f nemá v bode $\bar a=(0,0)$ lokálny extrém.

---

f má vo všetkých bodoch $\bar a=(0,y)$ kde $y>0$ lokálne minimum (podobne ako v $\bar a=(0,3)$)

f má vo všetkých bodoch $\bar a=(0,y)$ kde $y<0$ lokálne maximum (podobne ako v $\bar a=(0,-3)$)

• $f(x,y)=x^2+y$; $\frac{\partial f}{\partial x}=2x$, $\frac{\partial f}{\partial y}=1 \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ nemá stacionárne body

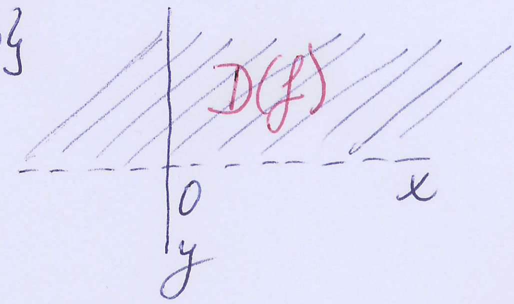
$\Downarrow$

f nemá žiadne lokálne extrémy (keďže je diferencovateľná v každom $\bar a\in R^2$)

$f(x,y) = (x-y)\ln y$

(a) $D(f)$: $\ln y$ je definované iba pre $y>0$ a teda

$$D(f) = \{(x,y) \in R^2 \mid y > 0\}$$



(b) 1-vé parc. derivácie a diferencovateľnosť f

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \ln y, \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -\ln y + \frac{x-y}{y}$$

existujú na $D(f)$ a sú spojité na $D(f)$ $\Longrightarrow$

$\Rightarrow$ f je diferencovateľná na $D(f)$ (t.j. v každom bode $a \in D(f)$.

(c) stacionárne body f :

$$\left.\begin{array}{l} \ln y = 0 \\ -\ln y + \frac{x-y}{y} = 0 \end{array}\right\} \quad \text{sčítaním rovníc} \quad \frac{x-y}{y} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$\ln y = 0 \Rightarrow y = 1$ $\qquad$ $x - y = 0 \Rightarrow x = y$

$\Longrightarrow x = y = 1$

jediný stac. bod $\bar{a} = (1,1) \in D(f)$

(d) lokálne extrémy f na $D(f)$. Pretože f je diferencovateľná v každom bode $D(f)$ $\Rightarrow$ f môže mať lok. extrémy len v stacionárnych bodoch f.

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{1}{y} + \frac{-y-(x-y)}{y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{1}{y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right]_{\substack{x=1\\y=1}} = 0, \quad \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right]_{\substack{x=1\\y=1}} = -2, \quad \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right]_{\substack{x=1\\y=1}} = 1$$

$$H_f(1,1) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1 < 0 \Rightarrow f \text{ má v } \bar{a} = (1,1) \text{ sedlový bod}$$

teda f nemá lokálne extrémy

Najdime lokálne extrémy funkcie
$f(x,y,z) = e^{2z}(3xy - 2yz)$

zrejme $D(f) = R^3$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 3y\,e^{2z}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = (3x-2z)e^{2z}$

$\frac{\partial f}{\partial z} = 2e^{2z}(3xy-2yz) + e^{2z}(-2y) = e^{2z}(6xy-4yz-2y)$

$\Rightarrow$ f je diferencovateľná na R^3 (má tam spojité všetky 1-vé parc. derivácie)

stac. body: $\left.\begin{aligned} 3y\,e^{2z} &= 0 \\ (3x-2z)e^{2z} &= 0 \\ (6xy-4yz-2y)e^{2z} &= 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{aligned} 3y &= 0 \\ 3x-2z &= 0 \\ 6xy-4yz-2y &= 0 \end{aligned}$ pretože: $e^{2z} \neq 0$, $z \in R$

z toho: $\boxed{y = 0,\ z = \frac{3}{2}x,\ x \in R \text{ ľubovoľné}}$ stac. body f

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2e^{2z}(6xy-4yz-2y) + e^{2z}(-4y) = e^{2z}(12xy-8yz-8y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 3e^{2z}$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 6y\,e^{2z}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = 2e^{2z}(3x-2z) + e^{2z}(-2) = e^{2z}(6x-4z-2)$

$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right]_{\bar{a}} = 0$, $\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right]_{\bar{a}} = 0$, $\left[\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right]_{\substack{x=x \\ y=0 \\ z=\frac{3}{2}x}} = 2e^{3x} \cdot 0 = 0$

$\longrightarrow$ pokračovanie

pokračovanie $\longrightarrow$

$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}\right]_{\substack{x=x\\ y=0\\ z=\frac{3}{2}x}} = 3e^{2\frac{3}{2}x} = 3e^{3x}, \quad \left[\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial x}\right]_{\substack{x=x\\ y=0\\ z=\frac{3}{2}x}} = 0$$

$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial y}\right]_{\substack{x=x\\ y=0\\ z=\frac{3}{2}x}} = e^{2\frac{3}{2}x}\left(6x-4\cdot\tfrac{3}{2}x-2\right) = e^{3x}(-2)$$

$$D^2 f_{\bar{a}}(\bar{h}) = 0\cdot h_1^2 + 0\cdot h_2^2 + 0\cdot h_3^2 + 2\cdot 3\cdot e^{3x} h_1 h_2 +$$
$$+\, 2\cdot 0\cdot h_1 h_3 + 2\cdot e^{2\frac{3}{2}x}\left(6x-4\cdot\tfrac{3}{2}x-2\right) h_2 h_3 =$$
$$= 6e^{3x} h_1 h_2 - 4e^{3x} h_2 h_3,$$ kde $x\in R$ je dané ľubovoľné číslo.

$$D^2 f_{\bar{a}}(\bar{h}) = e^{3x}(6h_1h_2 - 4h_2h_3) \begin{cases} >0 & \text{pre } \bar{h}^{(1)}=(1,1,0) \\ <0 & \text{pre } \bar{h}^{(2)}=(0,1,1) \end{cases}$$

pretože $e^{3x}>0$ pre všetky $x\in R$

Funkcia f má v každom bode $\bar{a}=(x,0,\frac{3}{2}x)$, $x\in R$
(t.j. v každom bode priamky $p \equiv \begin{cases} y=0 \\ z=\frac{3}{2}x \end{cases}$)
sedlový bod.

p je priamka v súradnicovej rovine (x,z)