

(B) [Dolný a horný integrálny súčet $f \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ na $\langle a, b \rangle$ (definície)!]

Nech funkcia f na $\langle a, b \rangle$ je ohraničená

Nech $x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ je delenie $\mathcal{D}$ intervalu $\langle a, b \rangle$, nech

$$m_k = \inf \{ f(x) \mid x \in \langle x_{k-1}, x_k \rangle \} \quad k = 1, 2, \dots, n$$

$$M_k = \sup \{ f(x) \mid x \in \langle x_{k-1}, x_k \rangle \} \quad 2$$

potom číslo $D(f, \mathcal{D}, a, b) = \sum_{k=1}^n m_k (x_k - x_{k-1})$

naзывame dolným integrálnym súčtom funkcie f pre delenie $\mathcal{D}$ intervalu $\langle a, b \rangle$ 1,5

$$\text{číslo } H(f, \mathcal{D}, a, b) = \sum_{k=1}^n M_k (x_k - x_{k-1})$$

naзывame horným integrálnym súčtom funkcie f pre delenie $\mathcal{D}$ interv. $\langle a, b \rangle$. 1,5

spolu 5 bodov.

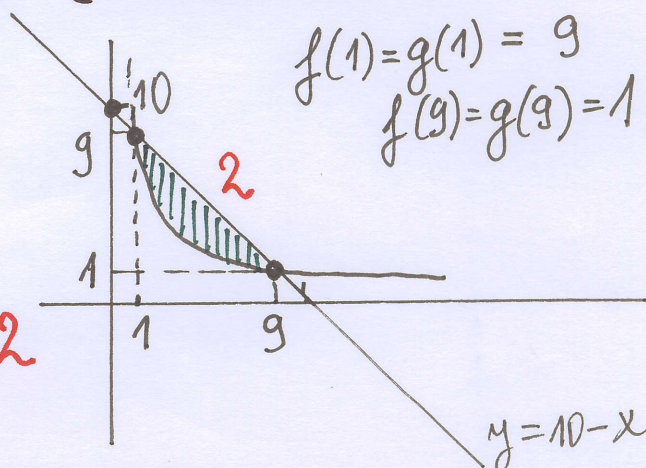
(2) [Plošný obsah medzi grafmi funkcií

$$f(x) = \frac{9}{x} \text{ , } g(x) = 10 - x \text{ (nakreslite)!}$$

priesečníky: $\frac{9}{x} = 10 - x$

$$x^2 - 10x + 9 = 0$$

$$x_{1,2} = 5 \pm \sqrt{16} = \begin{matrix} 9 \\ 1 \end{matrix} \quad 2$$



Pokračovanie (B) :

$$\begin{aligned} P &= \int_1^9 \left(10 - x - \frac{9}{x}\right) dx = \left[10x - \frac{x^2}{2} - 9 \ln x\right]_1^9 \\ &= 90 - \frac{81}{2} - 9 \ln 9 - 10 + \frac{1}{2} + 9 \ln 1 = \\ &= 80 - \frac{80}{2} - 9 \ln 9 = \underline{40 - 9 \ln 9} \quad 4 \end{aligned}$$

spolu 8 bodov

(3) [zistite či konverguje nevlastný integrál

$$\int_0^1 \frac{3}{\sqrt{x}} dx$$

pretože $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3}{\sqrt{x}} = \infty$, tak

$$\int_0^1 \frac{3}{\sqrt{x}} dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 \frac{3}{\sqrt{x}} dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 3x^{-\frac{1}{2}} dx =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} 3 \left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_t^1 = \lim_{t \rightarrow 0^+} 6 [\sqrt{x}]_t^1 =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} 6(1 - \sqrt{t}) = 6(1 - 0) = \underline{6} \quad 4$$

teda daný integr. konverguje

spolu 7 bodov