Matematika 2E SW5

Ľ. Marko

February 23, 2021

CONTENTS

PREDHOVOR

Matematika je univerzálny jazyk pre fyzikálne a technické vedy. Preto je nutné aby študenti FEI STU Bratislava rozumeli základným matematickým pojmom z matematickej analýzy funkcií jednej aj viacerých reálnych premenných. Tento učebný text z matematickej analýzy som vytvoril po novej akreditácii pre študijné odbory AM, ENE, ET, JF počas letného semestra školského roku 2017/2018. Nemožno ho považovať za konečnú verziu. Pretože predmet "Matematika 2E" sa vyučuje prvý krát, budem text doplňať a adaptovať v priebehu letného semestra školského roku 2017/18. Ľ. Marko

Part I

Matematická analýza I.

Mnohé fyzikálne a elektrotechnické aplikácie si vyžadujú, aby študenti rozumeli základným pojmom z matematickej analýzy, integrálneho počtu, integračných metód, diferenciálneho aj integrálneho počtu funkcií viacerých premenných. Tieto poznatky nutne patria k "povinnej výbave" každého študenta FEI STU.

Chapter 1 INTEGRÁLNY POČET FUNKCIí JEDNEJ REÁLNEJ PREMENNEJ.

Mnohé fyzikálne a technické aplikácie si vyžadujú, aby sme vedeli vypočítať napríklad prácu premennej sily po určitej dráhe, dĺžky kriviek v rovine, plošné obsahy rôznych rovinných útvarov, objemy priestorových telies. Vhodným aparátom vo všetkých predošlých prípadoch je znalosť integrálneho počtu. V tejto časti aj v ďalších častiach sa budeme venovať integrálnemu počtu.

Určitý integrál.

Predpokladajme, že chceme nájsť plošný obsah obrazca R ohraničeného osou o_x, priamkami $x = a$, $x = b$ a grafom spojitej funkcie $f : \langle a, b\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}$, $(f(x) > 0)$. Naša snaha bude nájsť obsah pomocou obdĺžnikov opísaných a vpísaných grafu funkcie.

Delenie intervalu.

Definition 1 *Delením intervalu* $\langle a, b\rangle$ *budeme nazývať konečnú množinu bodov* $P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$, *takých, že* $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$.

Delenie P delí interval $\langle a, b\rangle$ na podintervaly $\langle x_0, x_1\rangle$, $\langle x_1, x_2\rangle$, $\langle x_2, x_3\rangle$, ..., $\langle x_{n-1}, x_n\rangle$. Ak dĺžku podintervalu $\langle x_{k-1}, x_k\rangle$ označíme $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $k = 1, 2, ..., n$, potom dĺžka intervalu $\langle a, b\rangle$ je rovná $b - a = (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + ... + (x_n - x_{n-1}) = \Delta x_1 + \Delta x_2 + ... + \Delta x_n$.

Definition 2 *Nech* P *je delenie intervalu* $\langle a, b\rangle$ *a nech* $f : \langle a, b\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}$ *je ohraničená funkcia. Sumu*

$$D(f, P) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k,\ H(f, P) = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k$$

nazývame dolným, respektíve horným integrálnym súčtom ohraničenej funkcie f *pre delenie* P, *kde* $m_k = \inf_{x\in\langle x_{k-1},x_k\rangle} f(x)$, $M_k = \sup_{x\in\langle x_{k-1},x_k\rangle} f(x)$.

Example 3 *Nájdime* $D(f, P)$, $H(f, P)$, $D(f, T)$, $H(f, T)$ *ak* $f : \langle 0, 2\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}$, $f(x) = x^2$ *a* $P = \left\{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\right\}$ *a* $T = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\right\}$.

Solution 4 *Pre delenie* P *máme*

$$m_1 = 0, m_2 = \frac{1}{4}, m_3 = 1, m_4 = \frac{9}{4}, M_1 = \frac{1}{4}, M_2 = 1, M_3 = \frac{9}{4}, M_4 = 4,$$

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3 = \Delta x_4 = \frac{1}{2}.$$

Potom $D(f, P) = \frac{7}{4}$ *a* $H(f, P) = \frac{15}{4}$. *Podobne dostaneme* $D(f, T) = \frac{113}{64}$ *a* $H(f, T) = \frac{237}{64}$. *Okrem toho platí :* $D(f, P) \leq D(f, T) \leq H(f, T) \leq H(f, P)$ $\square$

Z definície delenia uzavretého intervalu je jasné, že $\forall P$ platí: $D(f,P) \leq H(f,P)$. Okrem toho, ak $f(x) \geq 0, \forall x \in \langle a,b\rangle$ pre plochu obrazca R medzi grafom funkcie f osou o_x a priamkami $x=a$, $x=b$ máme:

$$D(f,P) \leq R \leq H(f,P).$$

Definition 5 *Delenie $\tilde{P}$ intervalu $\langle a,b\rangle$, ktoré vznikne z delenia P pridaním konečného počtu bodov sa nazýva zjemnenie delenia P.*

Example 6 *Delenie T v predchádzajúcom príklade je zjemnením delenia P intervalu $\langle 0,2\rangle$.*

Theorem 7 *Ak T je zjemnením delenia P intervalu $\langle a,b\rangle$, potom $D(f,P) \leq D(f,T)$ a $H(f,T) \leq H(f,P)$.*

Theorem 8 *Nech P a Q sú dve ľubovoľné rôzne delenia intervalu $\langle a,b\rangle$. Potom pre každú ohraničenú funkciu $f:\langle a,b\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}$ platí $D(f,P) \leq H(f,Q)$.*

Definition 9 *Ohraničená funkcia $f:\langle a,b\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}$ sa nazýva (riemannovsky) integrovateľná ak ku každému $\varepsilon > 0$ existuje delenie P_ε také, že $H(f,P_\varepsilon) - D(f,P_\varepsilon) < \varepsilon$. Definícia je ekvivalentná s podmienkou, že existuje číslo I, také že*

$$I = \sup\{D(f,P) : P \text{ je delenie } \langle a,b\rangle\} = \inf\{H(f,T) : T \text{ je delenie } \langle a,b\rangle\}.$$

Hodnota I, ktorá vyhovuje podmienke sa nazýva určitý integrál z funkcie f na $\langle a,b\rangle$ a označujeme ju

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

čítame integrál od a po b z funkcie f.

Tak $\int_a^b f(x)\,dx$ je jediné reálne číslo I také, že

$$D(f,P) \leq I \leq H(f,P),\ \forall P \text{ delenie } \langle a,b\rangle.$$

> Majme danú spojitú funkciu $f:\langle a,b\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}$, pre ktorú poznáme hodnotu $\int_a^b f(x)\,dx$. Plošný obsah obrazca ohraničeného osou o_x, priamkami $x=a$, $x=b$ a grafom spojitej funkcie $f:\langle a,b\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}$ vytvára geometrickú interpretáciu určitého integrálu. Určitý integrál $\int_a^b f(x)\,dx$ je číslo, ktoré závisí iba od f, a, b. Premenná x, ktorá sa objavuje v integrále je „nemá", môžeme ju zameniť za inú. Tak napríklad $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du$.

Remark 10 *Symbol $\int$ je označením integrálu, číslo a nazývame dolnou hranicou určitého integrálu, číslo b nazývame hornou hranicou určitého integrálu.*

Example 11 *Ukážeme, že funkcia $f:\langle a,b\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}$, $f(x) = k$ je integrovateľná funkcia.*

Solution 12 *Platí $D(f,P) = k(b-a) = H(f,P)$, $\forall P$. Odkiaľ dostávame $\int_a^b f(x)\,dx = k(b-a)$.*$\square$

Example 13 *Ukážeme, že funkcia* $f : \langle a, b\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}$, $f(x) = x$ *je riemannovsky integrovateľná funkcia a platí*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

Solution 14 *Nech* $P = \{a = x_0, x_1, x_2, ..., x_n = b\}$, *je delenie intervalu* $\langle a, b\rangle$. *Potom* $m_k = x_{k-1}, M_k = x_k$ *a platí:* $x_{k-1} < \frac{x_{k-1}+x_k}{2} < x_k$. *Potom* $D(f,P) = \sum_{k=1}^n x_{k-1}(x_k - x_{k-1}) < \sum_{k=1}^n \frac{x_{k-1}+x_k}{2}(x_k - x_{k-1}) < \sum_{k=1}^n x_k(x_k - x_{k-1}) = H(f,P)$, $\sum_{k=1}^n \frac{x_{k-1}+x_k}{2}(x_k - x_{k-1}) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \left(x_k^2 - x_{k-1}^2\right) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$ *,t.j.*

$$D(f,P) < \frac{1}{2}\left(b^2 - a^2\right) < H(f,P),\ \forall P,$$

odkiaľ máme

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b^2 - a^2}{2}.\square$$

Example 15 *Ukážeme, že funkcia* $f : \langle a, b\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}$, $f(x) = x^2$, $a \geq 0$ *je riemannovsky integrovateľná funkcia a platí*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b^3 - a^3}{3}.$$

Solution 16 *Nech* P *je ako v predchádzajúcom príklade, potom* $m_k = x_{k-1}^2, M_k = x_k^2$ *a* $\forall x_{k-1}, x_k \in \boldsymbol{R}$ *platí:*

$$x_{k-1}^2 < \frac{x_{k-1}^2 + x_{k-1}x_k + x_k^2}{3} < x_k^2.$$

Potom použitím postupu z predchádzajúceho príkladu dostaneme výsledok. $\square$

Vlastnosti a existencia určitého integrálu.

Theorem 17 *(Veta o vlastnostiach určitého integrálu) Nech* f, g *sú integrovateľné funkcie na* $\langle a, b\rangle$ *a nech* $k \in \boldsymbol{R}$. *Potom platí*

1) $kf + g$ *je integrovateľná a platí*

$$\int_a^b (kf + g)(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx \quad \textit{(lineárnosť)}.$$

2) Ak $f(x) \geq 0$, *pre každé* $x \in \langle a, b\rangle$, *potom* $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$; *ak* $f(x) \geq g(x)$, *pre každé* $x \in \langle a, b\rangle$, *potom* $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$.

3) Ak $m \leq f(x) \leq M$, *pre každé* $x \in \langle a, b\rangle$, *potom*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a).$$

4) Ak f *je integrovateľná, potom aj* $|f|$ *je integrovateľná a platí*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f|(x)\,dx.$$

Example 18 *Ukážme, že platí* $2 \leq \int_{-1}^{1} \sqrt{1+x^4}dx \leq \frac{8}{3}$.

Solution 19 *Platí nerovnica*

$$1 \leq 1 + x^4 \leq 1 + 2x^2 + x^4 = (1 + x^2)^2,$$

teda

$$1 \leq \sqrt{1+x^4} \leq 1 + x^2,$$

s využitím vety 17 a príkladov 11 a 15 dostávame

$$2 = \int_{-1}^{1} 1dx \leq \int_{-1}^{1} \sqrt{1+x^4}dx \leq \int_{-1}^{1} \left(1+x^2\right) dx = 2 + \frac{1^3 - (-1)^3}{3} = \frac{8}{3}.\Box$$

Doteraz sme predpokladali, že funkcia f je ohraničená a integrovateľná. Teraz sa budeme zaujímať o podmienky za akých je funkcia integrovateľná. Nie každá ohraničená funkcia musí byť integrovateľná ako ukazuje nasledujúci príklad.

Example 20 *Daná je funkcia*

$$f : \langle 0, 1\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R},\ f(x) = \begin{cases} 1 & pre \quad x \text{ iracionálne} \\ 0 & pre \quad x \text{ racionálne} \end{cases}.$$

Ukážme, že f nie je riemannovsky integrovateľná.

Solution 21 *Každý horný súčet $H(f,P) = 1$ a každý dolný súčet $D(f,P) = 0$, pre ľubovoľné delenie P intervalu $\langle 0,1\rangle$, pretože každý jeho podinterval vždy obsahuje racionálne aj iracionálne číslo. Máme:*

$$\sup\{D(f,P) : P \text{ je delenie } \langle 0,1\rangle\} = 0,\ \inf\{H(f,T) : T \text{ je delenie } \langle 0,1\rangle\} = 1,$$

neexistuje teda číslo I, také aby

$$I = \sup\{D(f,P) : P \text{ je delenie } \langle a,b\rangle\} = \inf\{H(f,T) : T \text{ je delenie } \langle a,b\rangle\},$$

funkcia f nie je riemannovsky integrovateľná. Okrem toho nie je spojitá v každom bode z $\langle 0,1\rangle$.$\Box$

Dá sa dokázať veta: každá spojitá funkcia definovaná na uzavretom intervale je rovnomerne spojitá. Teraz môžeme sformulovať postačujúcu podmienku integrovateľnosti.

Postačujúca podmienka integrovateľnosti funkcie.

Theorem 22 *(Postačujúca podmienka integrovateľnosti funkcie) Ak $f : \langle a,b\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}$ je spojitá funkcia, potom je na $\langle a,b\rangle$ riemannovsky integrovateľná.*

Theorem 23 *(Veta o aditívnosti určitého integrálu) Nech $f : \langle a,b\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}$ je spojitá funkcia a nech $c \in (a,b)$. Potom*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Example 24 *Vypočítajte* $\int_{-1}^{2} |x| \, dx$.

Solution 25 *Funkcia* $f(x) = |x|$ *je spojitá na intervale* $\langle -1, 2 \rangle$, *keď využijeme vetu o aditívnosti určitého integrálu a výsledok príkladu dostaneme:*

$$\int_{-1}^{2} |x| \, dx = \int_{-1}^{0} |x| \, dx + \int_{0}^{2} |x| \, dx = \int_{-1}^{0} (-x) \, dx + \int_{0}^{2} x dx =$$

$$= -\int_{-1}^{0} x dx + \int_{0}^{2} x dx = -\frac{0^2 - (-1)^2}{2} + \frac{2^2 - 0^2}{2} = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}. \square$$

Veta o strednej hodnote pre integrály.

Theorem 26 *(Veta o strednej hodnote pre integrály). Nech* $f : \langle a, b \rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}$ *je spojitá funkcia. Potom existuje bod* $c \in \langle a, b \rangle$ *taký, že*

$$\int_{a}^{b} f(x) \, dx = f(c) (b - a).$$

Hodnota $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_{a}^{b} f(x) \, dx$ sa nazýva stredná hodnota funkcie f na intervale $\langle a, b \rangle$.

Example 27 *Nájdime strednú hodnotu funkcie* $f : \langle 1, 3 \rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}, f(x) = x$.

Solution 28 *Máme* $\int_{1}^{3} x dx = \frac{3^2 - 1^2}{2} = 4$. *Podľa vety o strednej hodnote existuje* $c \in \langle 1, 3 \rangle$ *taký, že* $\int_{1}^{3} x dx = f(c)(3 - 1)$. *V našom prípade strednou hodnotou funkcie* $f(x) = x$ *na intervale* $\langle 1, 3 \rangle$ *je hodnota*

$$f(2) = 2,$$

pretože

$$f(2) = 2 = \frac{1}{3 - 1} \int_{1}^{3} x dx. \square$$

Pomocné definície.

V definícii $\int_{a}^{b} f(x) \, dx$ sme explicitne predpokladali, že $a < b$. Ale pre teoretické dôvody v ďalších aplikáciách je vhodné definovať

Definition 29 *Nech* $f : \langle a, b \rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}, a < b$ *je spojitá funkcia. Potom definujeme*

$$\int_{a}^{a} f(x) \, dx = 0, \int_{b}^{a} f(x) \, dx = -\int_{a}^{b} f(x) \, dx.$$

Hlavná veta integrálneho počtu.

V tejto časti rozvinieme metódy pre výpočet $\int_{b}^{a} f(x) \, dx$ bez počítania horných a dolných integrálnych súčtov.

Určitý integrál ako funkcia hornej hranice a primitívna funkcia.
Nech $f:\langle a,b\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}$ je spojitá funkcia a $c\in\langle a,b\rangle$ je ľubovoľné pevné číslo, potom pre každé $x\in\langle a,b\rangle$ je funkcia f spojitá na intervale $\langle c,x\rangle$, alebo $\langle x,c\rangle$. Teda $\forall x$ existuje integrál $\int_c^x f(t)\,dt$. Takto dostaneme funkciu $G:\langle a,b\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}$, $G(x)=\int_c^x f(t)\,dt$, pre $a\le x\le b$. Ak napríklad $f:\langle 0,10\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}$, $f(x)=x$, $c=1$, potom

$$G(0)=\int_1^0 tdt=-\int_0^1 tdt=-\frac{1}{2}\left(1^2-0^2\right)=-\frac{1}{2},$$

$$G(1)=\int_1^1 tdt=0$$

a pre každé $x\in\langle 0,10\rangle$ máme

$$G(x)=\int_1^x tdt=\frac{1}{2}\left(x^2-1\right).$$

Všimnime si, že $G'=f$ na $\langle 0,10\rangle$. Skutočne, pre každú spojitú funkciu na intervale $\langle a,b\rangle$, ak $G(x)=\int_c^x f(t)\,dt$, potom $G'(x)=f(x)$.

Theorem 30 *(O diferencovateľnosti určitého integrálu ako funkcie hornej hranice) Nech $f:\langle a,b\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}$ je spojitá funkcia a nech $c\in\langle a,b\rangle$. Definujeme funkciu $G:\langle a,b\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}$, $G(x)=\int_c^x f(t)\,dt$. Potom G je diferencovateľná na $\langle a,b\rangle$ a platí $G'(x)=f(x)$ pre $x\in\langle a,b\rangle$.*

My sme predpokladali, že f je definovaná na $\langle a,b\rangle$. Ale jediný fakt o $\langle a,b\rangle$, ktorý sme použili v predchádzajúcej vete bol, že interval $\langle x,y\rangle$ (alebo $\langle y,x\rangle$) leží v $\langle a,b\rangle$. Tvrdenie vety však zostane v platnosti, ak interval $\langle a,b\rangle$ zameníme za nejaký iný ľubovoľný interval I (napríklad aj neohraničený). Tak sme vlastne dokázali vetu:

Theorem 31 *Nech $f:I\longrightarrow \boldsymbol{R}$ je spojitá funkcia (I je interval) a nech $c\in I$ je ľubovoľný bod. Definujeme $G:I\longrightarrow \boldsymbol{R}$, $G(x)=\int_c^x f(t)\,dt$, $x\in I$. Potom G je diferencovateľná na I a platí $G'(x)=f(x)$, $\forall x\in I$.*

Definition 32 *Nech I je interval a $f:I\longrightarrow \boldsymbol{R}$, $F:I\longrightarrow \boldsymbol{R}$ sú také funkcie, že $F'(x)=f(x)$, $\forall x\in I$. Potom hovoríme, že funkcia F je primitívna funkcia k funkcii f na I.*

Example 33 *Zistite, či funkcie x^2, x^2+1, $x^2-\pi$, x^2+1000 sú primitívne funkcie k funkcii $2x$ na ľubovoľnom intervale I.*

Solution 34 *Ak C je ľubovoľná konštanta, potom x^2+C je primitívna funkcia k funkcii $2x$ na I, pretože $\left(x^2+C\right)'=2x$, $\forall x\in I$.$\square$*

Theorem 35 *(Veta o primitívnej funkcii) a) Nech $G:I\longrightarrow \boldsymbol{R}$ je primitívna funkcia k funkcii $f:I\longrightarrow \boldsymbol{R}$. Potom funkcia $F:I\longrightarrow \boldsymbol{R}$, $F(x)=G(x)+C$, kde C je ľubovoľná konštanta, je tiež primitívna funkcia k funkcii f.*

b) Ak $F(x)$ a $G(x)$ sú dve rôzne primitívne funkcie k funkcii f, potom $F(x)=G(x)+C$.

Hlavná veta integrálneho počtu.

Theorem 36 *(Hlavná veta integrálneho počtu) Nech $f : \langle a,b\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}$ je spojitá funkcia.*

a) Potom f má primitívnu funkciu na $\langle a,b\rangle$.

b) Ak F je nejaká primitívna funkcia k funkcii f na $\langle a,b\rangle$, potom

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b .$$

Posledný vzťah sa nazýva Newtonov - Leibnizov vzorec.

Example 37 *Vypočítajte $\int_0^2 x^2 dx$.*

Solution 38 *V tomto prípade primitívnou funkciou ku $f(x) = x^2$ je napríklad funkcia $F(x) = \frac{x^3}{3}$. Potom*

$$\int_0^2 x^2 dx = F(2) - F(0) = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{1}{3}(8-0) = \frac{8}{3}.\square$$

Example 39 *Vypočítajte $\int_1^4 x^{\frac{1}{2}} dx$.*

Solution 40 *Primitívnou funkciou ku $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ je napríklad funkcia $F(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$. Potom*

$$\int_1^4 x^{\frac{1}{2}} dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = \frac{14}{3}.\square$$

Example 41 *Vypočítajte $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$.*

Solution 42 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - 0 = 1.\square$

Theorem 43 *Nech $f : \langle a,b\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}$ je spojitá funkcia. Potom pre každú primitívnu funkciu F k funkcii f platí*

$$\int_b^a f(x)\,dx = F(a) - F(b) = [F(x)]_b^a .$$

Diferencovanie a integrovanie ako inverzné procesy.

Môžeme písať: ak $f : I \longrightarrow \boldsymbol{R}$ je spojitá a $a \in I$, potom

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = f(x).$$

Z druhej strany ak $F : I \longrightarrow \boldsymbol{R}$ má spojitú deriváciu, dostaneme

$$\int_a^x F'(t)\,dt = F(x) - F(a),$$

t.j. derivovanie a integrovanie sú inverzné procesy.

Neurčitý integrál a integračné pravidlá.

Ak počítame určitý integrál $\int_a^b f(x)\,dx$ pomocou hlavnej vety integrálneho počtu, potom základným problémom je nájsť primitívnu funkciu k funkcii f. V tejto časti ukážeme niektoré elementárne pravidlá, ktoré nám pomôžu pri hľadaní primitívnych funkcií.

Definition 44 *Nech $f : I \longrightarrow \boldsymbol{R}$ je spojitá (I je interval). Ľubovoľná primitívna funkcia ku f na I sa tiež nazýva neurčitým integrálom k f na I a označuje sa $\int f(x)\,dx$.*

Samozrejme, ak F je neurčitý integrál funkcie f, potom pre každú konštantu $C \in \boldsymbol{R}$, funkcia $F+C$ je tiež neurčitým integrálom, pretože $(F+C)' = F'+C' = f$. Preto napríklad pre neurčitý integrál z funkcie $f(x) = x^2$ píšeme

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C.$$

Theorem 45 *(Veta o násobku neurčitého integrálu a súčte neurčitých integrálov) Nech $f, g : I \longrightarrow \boldsymbol{R}$ sú spojité funkcie a $c \in \boldsymbol{R}$ je ľubovoľná konštanta. Potom*

$$\int (cf)(x)\,dx = c\int f(x)\,dx, \int (f+g)(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx.$$

Example 46 *Vypočítajte integrál $\int (2x - 3\cos x)\,dx$.*

Solution 47 $\int (2x - 3\cos x)\,dx = 2\int x dx - 3\int \cos x dx = x^2 - 3\sin x + C.\square$

Example 48 *Vypočítajte integrál $\int_0^1 (4x^2 + 5x^3)\,dx$.*

Solution 49 $\int_0^1 (4x^2 + 5x^3)\,dx = 4\int_0^1 x^2 dx + 5\int_0^1 x^3 dx = 4\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + 5\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{31}{12}.\square$

Pre polynóm dostaneme:

$$\int \left(c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + ... + c_{n-1}x + c_n\right) dx = c_0\frac{x^{n+1}}{n+1} + c_1\frac{x^n}{n} + ... + c_{n-1}\frac{x^2}{2} + c_n x + C.$$

Pripomenieme niektoré neurčité integrály, ktoré už poznáme z diferenciálneho počtu:

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C,\ a \neq -1,$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$

$$\int e^x dx = e^x + C,$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C,$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{cotg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \left\{ \begin{array}{c} \operatorname{arctg} x + C \\ -\operatorname{arccotg} x + C \end{array} \right. ,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left\{ \begin{array}{c} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{array} \right. ,$$

$$\int \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2+a^2} \right| + C,$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C.$$

Cvičenia.

Pomocou priameho integrovania, využívajúc len vzorce integrálov elementárnych funkcií, vypočítajme:

1. $\int (3x^3 + 2x - 4)\, dx. \quad \left[\frac{3}{4}x^4 + x^2 - 4x\right].$
2. $\int \left(\frac{x^2}{3} - \frac{x}{5}\right)\, dx. \quad \left[\frac{x^3}{9} - \frac{x^2}{10}\right].$
3. $\int \left(\sqrt{x^3} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\, dx. \quad \left[\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} - 2x^{\frac{1}{2}}\right].$
4. $\int \frac{x^3+x^2-x}{x^{\frac{3}{2}}}\, dx. \quad \left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}}\right].$
5. $\int \frac{\sqrt{x^4+2+x^{-4}}}{x^3}\, dx. \quad \left[\ln|x| - \frac{1}{4x^4}\right].$
6. $\int \frac{x\left(\sqrt[3]{x} - x\sqrt[3]{x}\right)}{\sqrt[4]{x}}\, dx. \quad \left[-\frac{12\sqrt[12]{x^{37}}}{37} + \frac{12\sqrt[12]{x^{25}}}{25}\right].$
7. $\int \frac{x^3-1}{x-1}\, dx. \quad \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x\right].$
8. $\int e^x a^x\, dx. \quad \left[\frac{e^x a^x}{1+\ln a}\right].$
9. $\int \left(5\cos x - 2x^5 + \frac{3}{1+x^2}\right)\, dx. \quad \left[5\sin x - \frac{x^6}{3} + 3\,\mathrm{arctg}\, x\right].$
10. $\int \left(10^{-x} + \frac{x^2+3}{x^2+1}\right)\, dx. \quad \left[-\frac{10^{-x}}{\ln 10} + x + 2\,\mathrm{arctg}\, x\right].$
11. $\int (2\sin x - 3\cos x)\, dx. \quad [-2\cos x - 3\sin x].$
12. $\int \frac{1}{\sqrt{3-3x^2}}\, dx. \quad \left[\frac{\arcsin x}{\sqrt{3}}\right].$
13. $\int \frac{3.2^x - 2.3^x}{2^x}\, dx. \quad \left[3x - \frac{3^x}{2^{x-1}(\ln 3 - \ln 2)}\right].$
14. $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos(2x)}\, dx. \quad \left[\frac{\mathrm{tg} x}{2} + \frac{x}{2}\right].$
15. $\int \frac{\cos(2x)}{(\cos^2 x)\sin^2 x}\, dx. \quad [-\mathrm{cotg} x - \mathrm{tg}\ x].$
16. $\int^2 \mathrm{tg}^2 x\, dx. \quad [\mathrm{tg}\ x - x].$
17. $\int \mathrm{cotg}^2 x\, dx. \quad [-\mathrm{cotg}\ x - x].$
18. $\int \frac{1}{\cos(2x)+\sin^2 x}\, dx. \quad [\mathrm{tg}\ x].$
19. $\int \frac{\left(1+2x^2\right)}{x^2(1+x^2)}\, dx. \quad \left[-\frac{1}{x} + \mathrm{arctg}\ x\right].$
20. $\int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)}\, dx. \quad [\ln|x| + 2\,\mathrm{arctg}\ x].$

Metódy integrálneho počtu.

V tejto časti sa oboznámime s rôznymi metódami výpočtu určitých aj neurčitých integrálov.

Integračná metóda per partes.

Theorem 50 *Nech $f, g : I \longrightarrow \boldsymbol{R}$ sú spojite diferencovateľné funkcie. Potom platí*

$$\int f(x)\, g'(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int f'(x)\, g(x)\, dx.$$

Theorem 51 *Nech $f, g : \langle a, b\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}$ sú spojite diferencovateľné funkcie. Potom platí*

$$\int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx = [f(x)\, g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)\, g(x)\, dx.$$

Výber funkcií $f(x)$ a $g'(x)$ sa na prvý pohľad môže zdať náročný. Väčšinou je výber prirodzený, čo znamená, že ani iný nie je možný. Po prepočítaní niekoľkých príkladov už obyčajne nerobí ťažkosti. Dobrou zásadou voľby je, aby sa integrál po aplikácii metódy per partes zjednodušil a nie skomplikoval.

Example 52 *Nájdime* $\int x \cos x dx$.

Solution 53 *Zvoľme f, f', g, g' nasledovne:* $\int x \cos x dx = \begin{vmatrix} f(x) = x & g'(x) = \cos x \\ f'(x) = 1 & g(x) = \sin x \end{vmatrix} = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C.$

Ak by sme zvolili $f(x) = \cos x$, $g'(x) = x$, potom $f'(x) = -\sin x$, $g(x) = \frac{x^2}{2}$ a dostaneme vzťah $\int x \cos x dx = -\frac{x^2}{2} \cos x + \int \frac{x^2}{2} \sin x dx$,

ktorý nevedie bezprostredne k nájdeniu integrálu.$\square$

Example 54 *Nájdime* $\int x \ln x dx$.

Solution 55 *V tomto príklade volíme $f(x) = \ln x$, $g'(x) = x$.*

$\int x \ln x dx = \begin{vmatrix} f(x) = \ln x & g'(x) = x \\ f'(x) = \frac{1}{x} & g(x) = \frac{x^2}{2} \end{vmatrix} = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{1}{x} \frac{x^2}{2} dx =$

$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C.\square$

Example 56 *Vypočítajme* $\int_1^2 x \ln^2 x dx$.

Solution 57 *V tomto príklade volíme $f(x) = \ln^2 x$, $g'(x) = x$.* $\int_1^2 x \ln^2 x dx = \begin{vmatrix} f(x) = \ln^2 x & g'(x) = x \\ f'(x) = 2 \ln x \frac{1}{x} & g(x) = \frac{x^2}{2} \end{vmatrix} = \left[\frac{x^2}{2} \ln^2 x\right]_1^2 - \int_1^2 2 \ln x \frac{1}{x} \frac{x^2}{2} dx =$

$= 2 \ln^2 2 - \int_1^2 x \ln x dx = 2 \ln^2 2 - 2 \ln 2 + \frac{3}{4}.\square$

Example 58 *Ukážeme, že pre $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$ platia nasledujúce rekurentné vzťahy:*

$\int \sin^n x dx = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x dx,$
$\int \cos^n x dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x dx.$
Ak $n-2=0$, potom $\sin^{n-2} x = \cos^{n-2} x = 1$.

Solution 59 *Výsledok ukážeme pre funkciu sínus. Odporúčame Vám prepočítať rekurentný vzťah pre funkciu kosínus. Zvolíme $f(x) = \sin^{n-1} x$, $g'(x) = \sin x$. Iná voľba ani nie je možná, pretože nepoznáme primitívnu funkciu k funkcii $\sin^{n-1} x$. Potom*

$$\int \sin^n x dx = \int \sin^{n-1} x \sin x dx = \left| \begin{array}{cc} f(x) = \sin^{n-1} x & g'(x) = \sin x \\ f'(x) = (n-1)\sin^{n-2} x \cos x & g(x) = -\cos x \end{array} \right| =$$
$$= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x \cos^2 x dx =$$
$$= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x \left(1 - \sin^2 x\right) dx =$$
$$= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x dx - (n-1)\int \sin^n x dx.$$

Tak sme dostali rovnicu: $\int \sin^n x dx = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x dx - (n-1)\int \sin^n x dx,$

z ktorej dostaneme: $n\int \sin^n x dx = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x dx,$

odkiaľ vyjadríme hľadanú neznámu $\int \sin^n x dx$*:* $\int \sin^n x dx = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x dx.\square$

Substitučná metóda.

Začneme s príkladom. Derivovaním zloženej funkcie napríklad $F : \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{R}$, $F(x) = \sin^2 x$ dostaneme:

$$\left(\sin^2 x\right)' = 2\sin x \cos x.$$

Teda funkcia $\sin^2 x$ je primitívna funkcia k funkcii $2\sin x \cos x$, to znamená, že

$$\int 2\sin x \cos x dx = \sin^2 x + C.$$

Theorem 60 *Nech I, J sú intervaly, $g : I \longrightarrow J$ je spojite diferencovateľná funkcia a $f : J \longrightarrow \boldsymbol{R}$ je spojitá funkcia.*

a) Ak $F : J \longrightarrow \boldsymbol{R}$ je primitívna funkcia ku f na intervale J, potom

$$\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = F(g(x)) + C,$$

b) ak $a, b \in I$, tak

$$\int_a^b f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\, du.$$

Example 61 *Vypočítajte* $\int 3\sin^2 x \cos x dx$.

Solution 62 *Nech je* $u = \sin x$*, potom* $\int 3\sin^2 x \cos x dx = \left| \begin{array}{c} u = \sin x \\ du = \cos x dx \end{array} \right| = 3\int u^2 du = u^3 + C = \sin^3 x + C.\square$

Example 63 *Vypočítajte* $\int \frac{x^4}{x^5+1}dx$.

Solution 64 *Nech* $u = (x^5+1)$, *potom* $\int \frac{x^4}{x^5+1}dx = \frac{1}{5}\int \frac{5x^4}{x^5+1}dx = \left| \begin{array}{c} u = x^5+1 \\ du = 5x^4 dx \end{array} \right| =$
$\frac{1}{5}\int \frac{1}{u}du =$
$= \ln|u| + C = \frac{1}{5}\ln|x^5+1| + C.$

Tento výpočet podľa definície prirodzeného logaritmu platí, ak funkcia $x^5+1 > 0$, *alebo* $x^5+1 < 0$.□

Example 65 *Vypočítajte* $\int_{-3}^{-2} \frac{x^4}{x^5+1}dx$ *a* $\int_{-2}^{1} \frac{x^4}{x^5+1}dx$.

Solution 66 *V prvom integrále je funkcia* $x^5+1 < 0$, *teda integrál existuje a platí:*

$\int_{-3}^{-2} \frac{x^4}{x^5+1}dx = \left[\frac{1}{5}\ln|x^5+1|\right]_{-3}^{-2} = \frac{1}{5}\ln\frac{31}{242}$.

V druhom integrále však funkcia $x^5+1 = 0$ *pre* $x = -1$, *teda neplatí* $x^5+1 > 0$, *ani* $x^5+1 < 0$ *na* $\langle -2, 1\rangle$ *preto* $\int_{-2}^{1} \frac{x^4}{x^5+1}dx$ *nemá zmysel.* □

Example 67 *Vypočítajte* $\int x\sqrt{2x+1}dx$.

Solution 68 *Nech* $u = 2x+1$, *potom máme*

$\int x\sqrt{2x+1}dx = \left| \begin{array}{c} u = 2x+1 \\ du = 2dx \Longrightarrow dx = \frac{1}{2}du \end{array} \right| = \frac{1}{4}\int (u-1)\sqrt{u}du =$
$= \frac{1}{4}\int u\sqrt{u}du - \frac{1}{4}\int \sqrt{u}du = \frac{1}{10}u^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{6}u^{\frac{3}{2}} + C =$
$= \frac{\sqrt{(2x+1)^5}}{10} - \frac{\sqrt{(2x+1)^3}}{6} + C$.□

Lemma 69 *Nech* I, J *sú intervaly,* $g : I \longrightarrow J$ *je spojite diferencovateľná bijekcia a* $f : J \longrightarrow \boldsymbol{R}$ *je spojitá funkcia. Nech* $G : I \longrightarrow \boldsymbol{R}$ *je primitívna funkcia k funkcii* $(f \circ g)\, g' : I \longrightarrow \boldsymbol{R}$. *Potom* $G \circ g^{-1} : J \longrightarrow \boldsymbol{R}$ *je primitívna funkcia k funkcii* $f : J \longrightarrow \boldsymbol{R}$.

Theorem 70 *Nech* I, J *sú intervaly,* $g : I \longrightarrow J$ *je spojite diferencovateľná bijekcia a* $f : J \longrightarrow \boldsymbol{R}$ *je spojitá funkcia. Potom pre každé* $a, b \in J$ *platí*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t))\,g'(t)\,dt.$$

Example 71 *Vypočítajte integrál* $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}+2}{6}} \frac{1}{\sqrt{6x-9x^2}}dx$.

Solution 72 $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}+2}{6}} \frac{1}{\sqrt{6x-9x^2}}dx = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}+2}{6}} \frac{1}{\sqrt{1-(9x^2-6x+1)}}dx = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}+2}{6}} \frac{1}{\sqrt{1-(3x-1)^2}}dx =$
$= \left| \begin{array}{cc} t = 3x-1 & dt = 3dx \Longrightarrow dx = \frac{1}{3}dt \\ x = \frac{1}{2} \rightarrow\ t = \frac{1}{2} & x = \frac{\sqrt{3}+2}{6} \rightarrow\ t = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \right| = \frac{1}{3}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt =$
$= \frac{1}{3}\left[\arcsin t\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{3}\left[\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \arcsin\left(\frac{1}{2}\right)\right] = \frac{1}{3}\left[\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right] = \frac{\pi}{18}$.□

Example 73 *Nech* $F(x)$ *je primitívna funkcia k funkcii* $f(x)$. *Nájdime* $\int f(ax+b)\,dx$, *kde* $a, b \in \boldsymbol{R}$, $a \neq 0$.

Solution 74 *Použijeme substitúciu* $u = ax+b$, *potom* $du = adx \Longrightarrow dx = \frac{1}{a}du$.
$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\int f(u)\,du = \frac{1}{a}(F(u)+C) = \frac{1}{a}F(ax+b) + K$.□

Cvičenia.

Pomocou vety o substitúcii počítajme integrály:

1. $\int \frac{1}{3+4x^2}\,dx.\qquad \left[\frac{1}{2\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\,\frac{2x}{\sqrt{3}}\right].$
2. $\int \frac{x}{3+4x^2}\,dx.\qquad \left[\frac{1}{8}\ln(3+4x^2)\right].$
3. $\int \frac{x}{(x^2+5)^4}\,dx.\qquad \left[-\frac{1}{6(x^2+5)^3}\right].$
4. $\int e^x \mathrm{tg}\, e^x\,dx.\qquad [-\ln|\cos e^x|].$
5. $\int \frac{3x+2}{x^2+4x+5}\,dx.\qquad \left[\frac{3}{2}\ln(x^2+4x+5)-4\mathrm{arctg}\,(x+2)\right].$
6. $\int \frac{2x+1}{x^2+2x+5}\,dx.\qquad \left[\ln(x^2+2x+5)-\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,\frac{x+1}{2}\right].$
7. $\int \frac{5x-1}{x^2+2x+3}\,dx.\qquad \left[\frac{5}{2}\ln(x^2+2x+3)-\frac{6}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\,\frac{(x+1)}{\sqrt{2}}\right].$
8. $\int \frac{2^x}{(2^x+3)^7}\,dx.\qquad \left[-\frac{1}{6\ln 2(2^x+3)^6}\right].$
9. $\int \frac{1}{\sqrt{3-4x^2}}\,dx.\qquad \left[\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x}{\sqrt{3}}\right].$
10. $\int \frac{x}{\sqrt{3-4x^2}}\,dx.\qquad \left[-\frac{1}{4}\sqrt{3-4x^2}\right].$
11. $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 5} \frac{(e^x-2)e^x}{e^{2x}+2e^x+7}\,dx.\qquad \left[\frac{1}{2}(\ln 42-\ln 15)-\frac{3}{\sqrt{6}}\left(\mathrm{arctg}\,\frac{6}{\sqrt{6}}-\mathrm{arctg}\,\frac{3}{\sqrt{6}}\right)\right].$
12. $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x+5\sin x-6}\,dx.\qquad \left[\frac{1}{7}\ln\left|\frac{1-\sin x}{6+\sin x}\right|\right].$
13. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2 x+1}{\cos^4 x+\cos^3 x}\sin x\,dx.\qquad \left[\frac{1}{2}+2\ln\frac{3}{2}\right].$
14. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{\sin x}{\cos^2 x-5\cos x+6}\,dx.\qquad \left[\ln\frac{4}{3}\right].$
15. $\int \frac{2}{x(\ln x-2)\left(\ln^2 x-2\ln x+2\right)}\,dx.\qquad \left[\ln\frac{|\ln x-2|}{\sqrt{(\ln x-1)^2+1}}-\mathrm{arctg}\,(\ln x-1)\right]$
16. $\int \frac{\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt[6]{x^7}+\sqrt[4]{x^5}}\,dx.\qquad \left[\frac{12}{\sqrt[12]{x}}-\frac{6}{\sqrt[6]{x}}+24\ln\left|\frac{\sqrt[12]{x}}{\sqrt[12]{x}+1}\right|\right].$
17. $\int \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{2x+1}{x+1}}\,dx.\qquad \left[\frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|-\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t-1}\right),\ t=\sqrt{\frac{2x+1}{x+1}}\right].$
18. $\int\limits_{1}^{64} \frac{2\sqrt{x}}{x\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}\right)}\,dx.\qquad \left[12\ln\frac{3}{2}\right].$
19. $\int \frac{3x+2}{\sqrt{x^2+x+3}}\,dx.\qquad \left[\frac{3t}{2}-\frac{\ln|1-2t|}{2}-\frac{33}{4(1-2t)},\ t=-x+\sqrt{x^2+x+3}\right].$
20. $\int \sqrt{x^2+4x+3}\,dx.\qquad \left[-\frac{t^2}{8}-\frac{t}{2}+\frac{\ln|t+2|}{2}+\frac{1}{8(t+2)^2},\ t=x-\sqrt{x^2+4x+3}\right].$

21. $\int \frac{1}{\sqrt{4-3x-x^2}}\,dx.$ $\quad \left[-2\mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{4-3x-x^2}-2}{x}\right)\right].$

22. $\int\limits_0^1 \frac{2x-10}{\sqrt{1+x-x^2}}\,dx.$ $\quad [-8,345].$

23. $\int \frac{1}{\cos x}\,dx.$ $\quad \left[\ln\left|\frac{\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}+1}{\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}-1}\right|\right].$

24. $\int \frac{1}{2\sin x-\cos x+5}\,dx.$ $\quad \left[\frac{\sqrt{5}}{5}\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{5}}{5}\left(3\,\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)+1\right)\right].$

25. $\int \frac{1}{\sin x-\cos x}\,dx.$ $\quad \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}+1-\sqrt{2}}{\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}+1+\sqrt{2}}\right|\right].$

26. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{tg}\,x}{\mathrm{tg}^2\,x+\mathrm{tg}\,x+1}\,dx.$ $\quad \left[\pi\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)\right].$

27. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{\cos^4 x+\sin^4 x}\,dx.$ $\quad \left[\frac{\pi}{4}\right].$

28. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\cos 2x}{\cos^4 x+\sin^4 x}\,dx.$ $\quad [1,246].$

29. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x-2\sin x+3}\,dx.$ $\quad \left[\frac{\pi}{4}\right].$

30. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{5+2\cos x}\,dx.$ $\quad [0,152].$

31. $\int \cos(\ln x)\,dx.$ $\quad \left[\frac{x}{2}\left(\cos(\ln x)+\sin(\ln x)\right)\right].$

Vypočítajme integrály

32. $\int x^2 e^{\sqrt{x}}\,dx.$

$\left[\left(2\left(\sqrt{x}\right)^5-10x^2+40\left(\sqrt{x}\right)^3-120x+240\sqrt{x}-240\right)e^{\sqrt{x}}\right]$ $\int (3x^3+2x-4)\,dx.$
$\left[\frac{3}{4}x^4+x^2-4x\right].$

33. $\int\left(\frac{x^2}{3}-\frac{x}{5}\right)dx.$ $\quad \left[\frac{x^3}{9}-\frac{x^2}{10}\right].$

34. $\int\left(\sqrt{x^3}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx.$ $\quad \left[\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5}-2x^{\frac{1}{2}}\right].$

35. $\int \frac{\sqrt{x^4+2+x^{-4}}}{x^3}\,dx.$ $\quad \left[\ln|x|-\frac{1}{4x^4}\right].$

36. $\int \frac{x\left(\sqrt[3]{x}-x\sqrt[3]{x}\right)}{\sqrt[4]{x}}\,dx.$ $\quad \left[-\frac{12\sqrt[12]{x^{37}}}{37}+\frac{12\sqrt[12]{x^{25}}}{25}\right].$

37. $\int \frac{x^3-1}{x-1}\,dx.$ $\quad \left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x\right].$

38. $\int e^x a^x\,dx.$ $\quad \left[\frac{e^x a^x}{1+\ln a}\right].$

39. $\int \left(5\cos x - 2x^5 + \frac{3}{1+x^2}\right)\ dx.$ $\left[5\sin x - \frac{x^6}{3} + 3\,\mathrm{arctg}\,x\right].$

40. $\int \left(10^{-x} + \frac{x^2+3}{x^2+1}\right)\ dx.$ $\left[-\frac{10^{-x}}{\ln 10} + x + 2\,\mathrm{arctg}\,x\right].$

41. $\int (2\sin x - 3\cos x)\ dx.$ $[-2\cos x - 3\sin x]$.

42. $\int \frac{1}{\sqrt{3-3x^2}}\ dx.$ $\left[\frac{\arcsin x}{\sqrt{3}}\right].$

43. $\int \frac{3.2^x - 2.3^x}{2^x}\ dx.$ $\left[3x - \frac{3^x}{2^{x-1}(\ln 3 - \ln 2)}\right].$

44. $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos(2x)}\ dx.$ $\left[\frac{\mathrm{tg} x}{2} + \frac{x}{2}\right].$

45. $\int \frac{\cos(2x)}{(\cos^2 x)\sin^2 x}\ dx.$ $[-\mathrm{cotg} x - \mathrm{tg}\ x]$.

46. $\int^2 \mathrm{tg}^2 x\ dx.$ $[\mathrm{tg}\ x - x]$.

47. $\int \mathrm{cotg}^2 x\ dx.$ $[-\mathrm{cotg}\ x - x]$.

48. $\int \frac{1}{\cos(2x)+\sin^2 x}\ dx.$ $[\mathrm{tg}\ x]$.

49. $\int \frac{\left(1+2x^2\right)}{x^2(1+x^2)}\ dx.$ $\left[-\frac{1}{x} + \mathrm{arctg}\ \ x\right].$

50. $\int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)}\ dx.$ $[\ln|x| + 2\,\mathrm{arctg}\ \ x]$.

Počítajte metódou per partes:

51. $\int x\sin x\ dx.$ $[\sin x - x\cos x]$.

52. $\int xe^{2x}\ dx.$ $\left[\frac{(2x-1)e^{2x}}{4}\right].$

53. $\int (x^3 - x + 1)e^{2x}\ dx.$ $\left[\frac{e^{2x}}{2}\left(x^3 - \frac{3x^2}{2} + \frac{x}{2} + \frac{3}{4}\right)\right].$

54. $\int\limits_0^{\pi} (2x^2+3)\cos 2x\ dx.$ $[\pi]$.

55. $\int \ln x\ dx.$ $[x\ln x - x]$.

56. $\int x\log_{10} 2x\ dx.$ $\left[\frac{x^2}{2}\left(\log_{10} 2x - \frac{1}{2\ln 10}\right)\right].$

57. $\int e^x \sin x\ dx.$ $\left[\frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x)\right].$

58. $\int \frac{x}{\cos^2 x}\ dx.$ $[x\mathrm{tg}\ x + \ln|\cos x|]$.

59. $\int \mathrm{arccotg}\, x\ dx.$ $\left[x\mathrm{arccotg}\, x + \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right].$

60. $\int x\ln(x^2+3x-10)\ dx.$ $\left[\frac{x^2}{2}\ln(x^2+3x-10) - \frac{x^2}{2} + \frac{3x}{2} - 2\ln|x-2| - \frac{25}{2}\ln|x+5|\right].$

61. $\int \ln(x^2-4x+6)\ dx.$ $\left[(x-2)\ln(x^2-4x+6) - 2x + \frac{4}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\frac{(x-2)}{\sqrt{2}}\right].$

62. $\int x\text{arctg}(x+3)\,dx.$ $\left[\frac{(x^2-8)}{2}\text{arctg}(x+3)-\frac{x}{2}+\frac{3}{2}\ln(x^2+6x+10)\right].$

63. $\int x\ln x\,dx.$ $\left[\frac{x^2}{2}\left(\ln x-\frac{1}{2}\right)\right].$

64. $\int xe^{-x}\,dx.$ $\left[-xe^{-x}-e^{-x}\right].$

65. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\sin x\,dx.$ $\left[\frac{(1+2e^{\pi})}{5}\right].$

66. $\int \text{arctg}x\,dx.$ $\left[x\text{arctg}\,x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right].$

67. $\int x^2 3^x\,dx.$ $\left[\frac{3^x}{\ln 3}\left(x^2-\frac{2x}{\ln 3}+\frac{2}{(\ln 3)^2}\right)\right].$

68. $\int x\text{arccotg}\ x\,dx.$ $\left[\frac{x^2+1}{2}\text{arccotg}\ x+\frac{x}{2}\right].$

69. $\int_0^{\pi} x^2\sin x\,dx.$ $\left[\pi^2-4\right].$

70. $\int\limits_0^1 x\text{arccotg}\ x\,dx.$ $\left[\frac{1}{2}\right].$

71. $\int \text{arccotg}\ x\,dx.$ $\left[x\text{arccos}\,x-\sqrt{1-x^2}\right].$

72. $\int\limits_1^{\sqrt{3}} x\text{arctg}x\,dx.$ $\left[\frac{5\pi}{12}-\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}\right]$

Špeciálne integračné metódy.

Integrovanie racionálnych funkcií.

Zo znalostí z lineárnej algebry vieme, že

a) každú nerýdzo racionálnu funkciu možno vyjadriť ako súčet polynómu a rýdzo racionálnej funkcie,

b) každú rýdzo racionálnu funkciu možno napísať ako konečný súčet nasledujúcich elementárnych zlomkov:

$$\frac{A}{(x-a)^n} \text{ a } \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m},$$

kde $A, M, N, p, q \in \boldsymbol{R}$, $m, n \in \boldsymbol{N}$ a $p^2-4q<0$. Integrovať racionálnu funkciu teda znamená integrovať výrazy predchádzajúceho typu.

$$\int \frac{A}{(x-a)^n}dx = \begin{cases} \frac{-A}{(n-1)(x-a)^{n-1}} & \text{pre} \quad n \neq 1 \\ A\ln|x-a| & \text{pre} \quad n=1 \end{cases}.$$

Druhý výraz nemožno vo všeobecnom prípade integrovať priamo, je potrebné ho najskôr upraviť:

$$\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m} = \frac{M}{2}\frac{2x+\frac{2N}{M}}{(x^2+px+q)^m} = \frac{M}{2}\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^m} + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\frac{1}{(x^2+px+q)^m}.$$

Prvý výraz po substitúcii $u = x^2+px+q$, vieme integrovať a dostaneme

$$\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^m}dx = \begin{cases} \frac{-1}{(m-1)(x^2+px+q)^{m-1}} & \text{pre} \quad m \neq 1 \\ \ln(x^2+px+q) & \text{pre} \quad m=1 \end{cases}.$$

Druhý výraz je integrál, ktorý upravíme na tvar

$$\int \frac{1}{(x^2+px+q)^m}dx = \int \frac{1}{\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\frac{4q-p^2}{4}\right)^m}dx,$$

a pomocou substitúcie $x = -\frac{p}{2}+t\sqrt{\frac{4q-p^2}{4}}$ transformujeme na integrál

$$\frac{\sqrt{\frac{4q-p^2}{4}}}{\left(\frac{4q-p^2}{4}\right)^m}\int \frac{1}{(t^2+1)^m}dt.$$

a integrál, ktorý označíme $I_m = \int \frac{1}{(t^2+1)^m}dt$ integrujeme nasledovne:

1. $I_1 = \int \frac{1}{t^2+1}dt = \operatorname{arctg} t$.
2. Pomocou rekurentného vzťahu $I_{m+1} = \frac{2m-1}{2m}I_m + \frac{t}{2m(t^2+1)^m}$, $m \in \boldsymbol{N}$.

Dôkaz rekurentného vzťahu: Aplikujeme metódu per partes na integrál I_m, kde zvolíme $f(t) = (t^2+1)^{-m}$, $g'(t) = 1$.

$$I_m = \int \frac{1}{(t^2+1)^m}dt = \frac{t}{(t^2+1)^m} + 2m\int \frac{t^2}{(t^2+1)^{m+1}}dt = \frac{t}{(t^2+1)^m} + 2mI_m - 2mI_{m+1}. \blacksquare$$

Example 75 *Vypočítajme* $\int \frac{2x+3}{x(x+1)^2}dx$.

Solution 76 *Máme* $\int \frac{2x+3}{x(x+1)^2}dx = \int \frac{3}{x}dx - \int \frac{3}{(x+1)}dx - \int \frac{1}{(x+1)^2}dx = 3\ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + \frac{1}{x+1} + C.\square$

Example 77 *Vypočítajme* $\int \frac{1}{x(x^2+1)^2}dx$.

Solution 78 *Dostávame:* $\int \frac{1}{x(x^2+1)^2}dx = \int \frac{1}{x}dx - \int \frac{x}{(x^2+1)}dx - \int \frac{x}{(x^2+1)^2}dx =$
$= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2(x^2+1)} + C.\square$

Example 79 *Vypočítajme* $\int \frac{2x-1}{x^2+2x+2}dx$.

Solution 80 *Dostávame:*

$$\int \frac{2x-1}{x^2+2x+2}dx = \int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx - \int \frac{3}{x^2+2x+2}dx =$$

$$= \ln\left|x^2+2x+2\right| - 3\int \frac{1}{(x+1)^2+1}dx = \ln\left|x^2+2x+2\right| - 3\operatorname{arctg}(x+1) + C.\square$$

Integrovanie iracionálnych funkcií.

Nech $a, b, c, d \in \boldsymbol{R}$ a nech $ad - bc \neq 0$. Nech k_1, k_2, ..., k_s sú prirodzené čísla. Nech $f : A \longrightarrow \boldsymbol{R}$ je funkcia, ktorá vznikne z funkcií

$h : A \longrightarrow \boldsymbol{R}$, $h(x) = c$,

$g : A \longrightarrow \boldsymbol{R}$, $g(x) = x$,

$g_1 : A \longrightarrow \boldsymbol{R}$, $g_1(x) = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{k_1}}$,

...,

$g_s : A \longrightarrow \boldsymbol{R}$, $g_s(x) = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{k_s}}$, pomocou konečného počtu racionálnych operácií, t.j. sčitovania, odčitovania, násobenia a delenia funkcií. Nech k je spoločný násobok čísel k_1, k_2, ..., k_s. To znamená, že $\frac{k}{k_1}$, $\frac{k}{k_2}$, ..., $\frac{k}{k_s}$ sú prirodzené čísla. Potom neurčitý integrál

$$\int f(x)\, dx$$

počítame pomocou substitúcie

$$t = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{k}} \Longrightarrow x = \frac{b - dt^k}{ct^k - a},\ dx = \frac{ad - bc}{\left(ct^k - a\right)^2} kt^{k-1} dt,$$

podmienka $ad - bc \neq 0$ zaručuje, že ku x existuje inverzná funkcia, pričom

$$t^{\frac{k}{k_1}} = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{k_1}},\ ...,\ t^{\frac{k}{k_s}} = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{k_s}}.$$

Po tejto substitúcii dostaneme integrál z racionálnej funkcie.

Example 81 *Vypočítajte* $\int \frac{1}{(x+2)(3x+5)} \sqrt{\frac{x+2}{2x+3}} dx$.

Solution 82 *Použijeme substitúciu*

$$t = \sqrt{\frac{x+2}{2x+3}},$$

potom

$$x = \frac{2 - 3t^2}{2t^2 - 1}$$

a

$$dx = \frac{-2t dt}{\left(2t^2 - 1\right)^2}.$$

Integrovaním dostaneme

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x+2)(3x+5)} \sqrt{\frac{x+2}{2x+3}} dx &= -2 \int \frac{1}{1+t^2} dt = -2 \operatorname{arctg} t + C = \\ &= -2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x+2}{2x+3}} + C. \square \end{aligned}$$

Integrovanie trigonometrických funkcií.

Pri integrovaní trigonometrických funkcií sa používajú spravidla substitúcie: $u = \sin x$, $u = \cos x$ a substitúcie, ktoré závisia od tvaru integrálu, alebo tzv. univerzálna trigonometrická substitúcia $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Ak použijeme univerzálnu trigonometrickú substitúciu, potom využívame vzťahy: $\sin x = \sin 2\frac{x}{2} = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \cos 2\frac{x}{2} = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

Example 83 *Vypočítajte* $\int \frac{\sin x \cos x}{(\sin x - \cos x - 1)^2}dx$.

Solution 84 *Položme* $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. *Potom dostaneme:* $\int \frac{\sin x\cos x}{(\sin x-\cos x-1)^2}dx = \left| \begin{array}{c} t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \\ x = 2\operatorname{arctg} t \\ dx = \frac{2}{1+t^2}dt \end{array} \right| =$

$$= \int \frac{\frac{2t}{1+t^2}\frac{1-t^2}{1+t^2}}{\left(\frac{2t}{1+t^2}-\frac{1-t^2}{1+t^2}-1\right)^2}\frac{2}{1+t^2}dt = \int \frac{\frac{2t}{1+t^2}\frac{1-t^2}{1+t^2}}{\left(\frac{2t}{1+t^2}-\frac{1-t^2}{1+t^2}-1\right)^2}\frac{2}{1+t^2}dt =$$
$$= \int \frac{2t\left(1-t^2\right)}{(2t-2)^2}\frac{2}{1+t^2}dt = \frac{1}{2}\int \frac{t(1-t)(1+t)}{(t-1)^2}\frac{2}{1+t^2}dt = -\frac{1}{2}\int \frac{t(1+t)}{(t-1)}\frac{2}{1+t^2}dt =$$
$$= -\int \frac{1}{t-1}dt - \int \frac{1}{1+t^2}dt = -\ln|t-1| - \operatorname{arctg} t + C =$$
$$= -\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1\right| - \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C.\square$$

Trigonometrické substitúcie pre výrazy $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{a^2+x^2}$, $\sqrt{x^2-a^2}$, $\sqrt{\pm a^2 \pm b^2x^2}$.

Výraz	Substitúcia	Zjednodušenie
$\sqrt{a^2-x^2}$	$x=a\sin t,\ t\in\left\langle -\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right\rangle$	$\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}=a\cos t$
$\sqrt{a^2+x^2}$	$x=a\operatorname{tg} t,\ t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$	$\sqrt{a^2+a^2\operatorname{tg}^2 t}=\frac{a}{\cos t}$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$x=\frac{a}{\cos t}, 0\le t\le\pi,\ t\neq\frac{\pi}{2}$	$\sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 t}-a^2}=a\operatorname{tg} t,\ 0\le t<\frac{\pi}{2}$ $\sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 t}-a^2}=-a\operatorname{tg} t,\ \frac{\pi}{2}<t\le\pi$
$\sqrt{\pm a^2\pm b^2x^2}$	$t=bx$	$\sqrt{\pm a^2\pm t^2}$

Example 85 *Vypočítajte* $\int_{-5}^{5}\sqrt{9-\frac{9}{25}x^2}dx$.

Solution 86 *Ak položíme* $v=\frac{3}{5}x$, *potom* $dx=\frac{5}{3}dv$, $x=-5\Longrightarrow v=-3$, $x=5\Longrightarrow v=3$ *a po ďalšej substitúcii* $v=3\sin u$, *t.j.* $dv=3\cos u du$, $v=-3\Longrightarrow u=-\frac{\pi}{2}$, $v=3\Longrightarrow u=\frac{\pi}{2}$ *dostaneme*

$$\int_{-5}^{5}\sqrt{9-\frac{9}{25}x^2}dx=\frac{5}{3}\int_{-3}^{3}\sqrt{9-v^2}dv=\frac{5}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{9-9\sin^2 u}.3\cos u du=$$

$$=15\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 u du=\frac{15}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2u)\,du=\frac{15}{2}\left[u+\frac{\sin 2u}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{15}{2}\pi.\square$$

Integrály typu $\int \sin^m x \cos^n x dx$.

$m, n \in \boldsymbol{N}$	Substitúcia	Vhodná identita
n - nepárne	$u = \sin x$	$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$
m - nepárne	$u = \cos x$	$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$
n a m - párne	redukovať na menšie mocniny n a m	$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$

Example 87 *Vypočítajte* $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$.

Solution 88 *V tomto prípade je* $n = 3$ *- nepárne, tak položíme* $u = \sin x$, *t.j.* $du = \cos x dx$. *Potom* $\int \sin^2 x \cos^3 x dx = \int \sin^2 x \cos^2 x \cos x dx = \int \sin^2 x \left(1 - \sin^2 x\right) \cos x dx =$
$= \int (u^2 - u^4)\, du = \frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} + C = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C.\square$

Example 89 *Vypočítajte* $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$.

Solution 90 *V tomto prípade je* m, n *párne. Podintegrálny výraz zredukujeme na tvar mocniny funkcie kosínus a potom použijeme rekurentné vzťahy:* $\int \sin^2 x \cos^2 x dx =$
$\frac{1}{4} \int (1 - \cos 2x)(1 + \cos 2x)\, dx = \frac{1}{4} \int (1 - \cos^2 2x)\, dx =$
$= \frac{1}{4} \int 1 dx - \frac{1}{4} \int \cos^2 2x dx = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\frac{1}{2} \int (1 + \cos 4x)\, dx =$
$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}x - \frac{1}{8}\frac{1}{4} \sin 4x + C = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32} \sin 4x + C.\square$

Integrály typu $\int \sin ax \cos bx dx$, $\int \sin ax \sin bx dx$, $\int \cos ax \cos bx dx$.

V tomto prípade použijeme jednu z trigonometrických identít

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}\left[\sin(x-y) + \sin(x+y)\right],$$

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) - \cos(x+y)\right],$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) + \cos(x+y)\right].$$

Example 91 *Vypočítajte* $\int \sin 5x \sin 3x dx$.

Solution 92 $\int \sin 5x \sin 3x dx = \frac{1}{2}\int \cos 2x dx - \frac{1}{2}\int \cos 8x dx = \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{16}\sin 8x + C$. *Použili sme výsledok predchádzajúceho príkladu.*

Eulerove substitúcie.

Nech $g : A \longrightarrow B$, $g(x) = \sqrt{ax^2+bx+c}$ a $f : C \longrightarrow \mathbf{R}$, $H(g) \subset C = D(f)$ je racionálna funkcia. Potom

$$\int (f \circ g)(x)\, dx = \int f\left(\sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$$

počítame pomocou Eulerových substitúcií.

$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}x \pm t$	ak	$a > 0$
$\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}$	ak	$c > 0$
$t = \sqrt{a\frac{x-\beta}{x-\alpha}}$, α, β sú korene rovnice $ax^2+bx+c=0$	ak	$a < 0 \wedge c < 0$

Po aplikácii týchto substitúcií dostaneme integrály z racionálnych funkcií.

Example 93 *Vypočítajte* $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}} dx$.

Solution 94 *Pretože* $a > 0$ *uvažujme Eulerovu substitúciu:* $\sqrt{x^2+x+1} = x - t$, *potom* $x = \frac{t^2-1}{2t+1}$ *a* $dx = \frac{2t^2+2t+2}{(2t+1)^2} dt$, $\sqrt{x^2+x+1} = x - t = \frac{-(t^2+t+1)}{2t+1}$. *Potom* $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}} dx = -2\int \frac{1}{2t+1} dt = -\ln|2t+1| + C = -\ln\left|2x - 2\sqrt{x^2+x+1}+1\right| + C$.□

Example 95 *Vypočítajte* $\int \frac{1}{\sqrt{4-2x-5x^2}} dx$.

Solution 96 *V tomto prípade je* $c > 0$ *uvažujme Eulerovu substitúciu:* $\sqrt{4-2x-5x^2} = xt + \sqrt{4}$, *potom* $x = \frac{-4t-2}{t^2+5}$ *a*

$$dx = \frac{4(t^2+t-5)}{(t^2+5)^2} dt, \sqrt{4-2x-5x^2} = xt + \sqrt{4} = \frac{-2(t^2+t-5)}{(t^2+5)}.$$

Potom $\int \frac{1}{\sqrt{4-2x-5x^2}} dx = -2\int \frac{1}{t^2+5} dt = -\frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\sqrt{5}}\right) + C = -\frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{4-2x-5x^2}-2}{\sqrt{5}x}\right) + C$.□

Example 97 *Vypočítajte* $\int \frac{\sqrt{-x^2+6x-8}}{(x-4)(2x-3)} dx$.

Solution 98 *V tomto prípade je* $a < 0 \wedge c < 0$, *korene rovnice* $-x^2+6x-8 = 0$ *sú* $x = 2, 4$. *Pre* $x \in \langle 2, 4)$ *môžeme upraviť výraz* $\sqrt{-x^2+6x-8} = \sqrt{-(x-2)(x-4)} = (x-4)\sqrt{(-1)\frac{x-2}{x-4}}$.

Uvažujme Eulerovu substitúciu: $t = \sqrt{(-1)\frac{x-2}{x-4}} = \sqrt{\frac{2-x}{x-4}}$, *potom* $x = \frac{4t^2+2}{t^2+1}$ *a* $dx = \frac{4t}{(t^2+1)^2} dt$, $\sqrt{-x^2+6x-8} = \sqrt{(2-x)(x-4)} = (x-4)\sqrt{\frac{2-x}{x-4}}$,

$2x - 3 = \frac{5t^2+1}{t^2+1}$.

Potom $\int \frac{\sqrt{-x^2+6x-8}}{(x-4)(2x-3)} dx = \int \frac{(x-4)\sqrt{\frac{2-x}{x-4}}}{(x-4)(2x-3)} dx = \int \frac{4t^2}{(5t^2+1)(t^2+1)} dt =$

$= -\int \frac{dt}{5t^2+1} + \int \frac{dt}{t^2+1} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{5}t\right) + \operatorname{arctg} t + C =$

$= -\frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{5\frac{2-x}{x-4}}\right) + \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{2-x}{x-4}}\right) + C$.□

Cvičenia.

Počítajte integrály z racionálnych funkcií:

1. $\int \frac{5x^3+9x^2-22x-8}{x^3-4x}\, dx.$ $\quad [5x + 2\ln|x| + 3\ln|x-2| + 4\ln|x+2|]\,.$

2. $\int \frac{-2x+19}{x^2+x-6}\, dx.$ $\quad \left[\ln \frac{|x-2|^3}{|x+3|^5}\right].$

3. $\int \frac{x^2+1}{x^4+x^3}\, dx.$ $\quad \left[2\ln|x| + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} - 2\ln|x+1|\right].$

4. $\int \frac{5x^2-7x+10}{x^3-x^2-4x-6}\, dx.$ $\quad \left[2\ln|x-3| + \frac{3}{2}\ln\left(x^2+2x+2\right) - 5\mathrm{arctg}(x+1)\right].$

5. $\int \frac{4x^2+x-13}{2x^3+12x^2+11x+5}\, dx.$ $\quad [2\ln|x+5| - 3\mathrm{arctg}\,(2x+1)]\,.$

6. $\int \frac{1}{x^3+1}\, dx.$ $\quad \left[\frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln\left(x^2-x+1\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}\,(2x-1)\right].$

7. $\int \frac{x^5+x^4-7x^3+8x-3}{x^3+x^2-6x}\, dx.$ $\quad \left[\frac{x^3}{3} - x + \frac{1}{2}\ln|x(x-2)|\right].$

8. $\int \frac{6x-13}{(4x^2+4x+17)}\, dx.$ $\quad \left[-\frac{x+2}{2(4x^2+4x+17)} - \frac{1}{16}\mathrm{arctg}\frac{2x+1}{4}\right].$

9. $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\, dx.$ $\quad \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + \ln\frac{x^2|x-2|^5}{|x+2|^3}\right]$

10. $\int \frac{x^2-x+2}{(x-3)(x-1)^2}\, dx.$ $\quad \left[2\ln|x-3| - \ln|x-1| + \frac{1}{x-1}\right]$

11. $\int \frac{3x^2-11x+7}{(x-3)(x^2-4x+4)}\, dx.$ $\quad \left[2\ln|x-2| + \ln|x-3| - \frac{3}{x-2}\right]$

12. $\int \frac{x^3+3x^2+1}{x^2+x}\, dx.$ $\quad \left[\frac{x^2}{2} + 2x + \ln|x| - 3\ln|x+1|\right]$

13. $\int \frac{3x^2-x-14}{x^3+x^2-5x+3}\, dx.$ $\quad \left[\ln|x+3| + 2\ln|x-1| + \frac{3}{x-1}\right]$

14. $\int \frac{2x^2+x+1}{(x+1)(x^2+2x+3)}\, dx.$ $\quad \left[\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+3\right| - \frac{3}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\,\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right]$

15. $\int \frac{x^2}{(1-x^2)(1+x^2)}\, dx.$ $\quad \left[\frac{1}{4}\ln|1+x| - \frac{1}{4}\ln|1-x| - \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,x\right]$

16. $\int\limits_0^1 \frac{x+2}{x^2+2x+5}\, dx.$ $\quad \left[\frac{1}{2}\ln\frac{8}{5} + \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{1}{2}\right]$

17. $\int\limits_3^4 \frac{2x^2-3x+10}{x^3-7x^2+10x}\, dx.$ $\quad \left[\ln\frac{1}{24}\right]$

18. $\int\limits_1^2 \frac{x^3-3x^2-10x+6}{x^2-4x-5}\, dx.$ $\quad \left[\frac{5}{2} - \ln 3\right]$

19. $\int\limits_2^3 \frac{x^2+2}{x^3-3x^2+3x-1}\, dx.$ $\quad \left[\ln 2 + \frac{17}{8}\right]$

    Počítajme metódou per partes.

20. $\int \ln(x^2-2x-3)\, dx.$ $\quad [x\ln(x^2-2x-3) - 2x + \ln|x+1| - 3\ln|x-3|]\,.$

21. $\int \ln(x^2-6x+9)\,dx$. $\quad [x\ln(x^2-6x+9)-2x-6\ln|x-3|]$.

22. $\int \ln(x^2+2x+3)\,dx$. $\quad \left[(x+1)\ln(x^2+2x+3)-2x+\frac{4}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\frac{(x+1)}{\sqrt{2}}\right]$.

23. $\int x^2\mathrm{arctg}\,(x-1)\,dx$. $\quad \left[\frac{1}{3}\left((x^3+2)\mathrm{arctg}(x-1)-\frac{x^2}{2}-2x-\ln(x^2-2x+2)\right)\right]$.

Pomocou vety o substitúcii počítajme integrály:

24. $\int \frac{x}{\sqrt{2-5x^2}}\,dx$. $\quad \left[-\frac{1}{5}\sqrt{2-5x^2}\right]$.

25. $\int \frac{e^x}{4e^{2x}-8e^x+13}\,dx$. $\quad \left[\frac{1}{6}\mathrm{arctg}\left(\frac{2}{3}(e^x-1)\right)\right]$.

26. $\int \frac{2e^{2x}-3e^x+10}{e^{2x}-7e^x+10}\,dx$. $\quad [x-2\ln|e^x-2|+3\ln|e^x-5|]$.

27. $\int \frac{\sin 2x}{\cos^2 x+2\cos x+5}\,dx$. $\quad \left[-\ln(\cos^2 x+2\cos x+5)+\mathrm{arctg}\left(\frac{\cos x+1}{2}\right)\right]$.

28. $\int \frac{\sin x\cos x}{\sin^2 x+\sin x-2}\,dx$. $\quad \left[\frac{1}{3}\ln|\sin x-1|+\frac{2}{3}\ln(\sin x+2)\right]$.

29. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x+\sin x-6}\,dx$. $\quad \left[\frac{1}{5}\ln\frac{3}{8}\right]$.

30. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin x\cos x}{\cos^2 x+\cos x-6}\,dx$. $\quad \left[\frac{1}{5}\ln\frac{16}{27}\right]$.

31. $\int \frac{e^x+10}{e^{2x}-2e^x+5}\,dx$. $\quad \left[2x-\ln(e^{2x}-2e^x+5)+\frac{3}{2}\mathrm{arctg}\frac{e^x-1}{2}\right]$.

32. $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x+\sqrt[6]{x^5}}\,dx$. $\quad \left[6\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{2}-\sqrt[6]{x}+\ln(\sqrt[6]{x}+1)\right)\right]$.

33. $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$. $\quad \left[\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}-1}{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+1}\right|+2\mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)\right]$.

34. $\int \frac{\sqrt{1+x}}{x}\,dx$. $\quad [2\sqrt{1+x}+\ln|\sqrt{1+x}-1|-\ln|1+\sqrt{1+x}|]$.

35. $\int \frac{\sqrt{2x+3}+x}{\sqrt{2x+3}-x}\,dx$. $\quad .\left[-\frac{t^2}{2}-4t-9\ln|t-3|+\ln|t+1|,\ t=\sqrt{2x+3}\right]$.

36. $\int\limits_0^4 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx$. $\quad [\ln 9]$.

37. $\int \frac{1}{\sqrt{8-6x-9x^2}}\,dx$. $\quad \left[\frac{1}{3}\left(\arcsin\left(x+\frac{1}{3}\right)\right)\right]$.

38. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+3x+1}}\,dx$. $\quad \left[\ln\frac{5+2\sqrt{5}}{5}\right]$.

39. $\int \frac{1}{x-\sqrt{x^2-x+1}}\,dx$. $\quad \left[2\ln|t|+\frac{1}{2}\ln|2t+1|+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2t+1},\ t=\sqrt{x^2-x+1}-x\right]$.

40. $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3+\cos x}\,dx$. $\quad \left[\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}-\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{6}}{6}\right)\right]$.

41. $\int \frac{1-\sin x}{1+\cos x}\,dx$. $\quad \left[\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}-\ln\left(\mathrm{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)+1\right)\right]$.

42. $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{1}{4-5\sin x}\,dx$. $\quad \left[\frac{1}{3}\ln 2\right]$.

43. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}\, dx.$ $\left[\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\ln 2\right].$

44. $\int \frac{1}{7\cos^2 x + 2\sin^2 x}\, dx.$ $\left[\frac{\sqrt{14}}{14}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{2}{7}}\operatorname{tg} x\right)\right].$

45. Vypočítajme $\int\limits_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\, dx.$ $[4-\pi].$

46. Vypočítajme $\int\limits_0^{2\pi} \cos 3x \cos 4x\, dx.$ $[0].$

47. Vypočítajme $\int x^2 e^{\sqrt{x}}\, dx.$ $\left[\left(2\left(\sqrt{x}\right)^5 - 10x^2 + 40\left(\sqrt{x}\right)^3 - 120x + 240\sqrt{x} - 240\right)e^{\sqrt{x}}\right].$

Počítajme integrály

1. $\int \frac{1}{4+3x^2}\, dx.$ $\left[\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}x}{2}\right].$
2. $\int \frac{x}{4+3x^2}\, dx.$ $\left[\frac{1}{6}\ln(4+3x^2)\right].$
3. $\int \frac{x}{(x^2+1)^3}\, dx.$ $\left[-\frac{1}{4(x^2+1)^2}\right].$
4. $\int \frac{3x-3}{x^2+2x+2}\, dx.$ $\left[\frac{3}{2}\ln(x^2+2x+2) - 6\operatorname{arctg}(x+1)\right].$
5. $\int \frac{3x+2}{x^2+4x+7}\, dx.$ $\left[\frac{3}{2}\ln(x^2+4x+7) - \frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{3}}\right].$
6. $\int e^x \operatorname{cotg} e^x\, dx.$ $[\ln|\sin e^x|].$
7. $\int \frac{2}{9x^2-1}\, dx.$ $\left[\frac{1}{3}\ln\frac{|3x-1|}{|3x+1|}\right].$
8. $\int \frac{1-x}{x^2+x}\, dx.$ $[\ln|x| - 2\ln|x+1|].$
9. $\int \frac{x^3-2x^2+9}{x^2-x-2}\, dx.$ $\left[\frac{x^2}{2} - x + 3\ln|x-2| - 2\ln|x+1|\right].$
10. $\int \frac{x}{x^3-3x+2}\, dx.$ $\left[\frac{2}{9}\ln|x-1| - \frac{1}{3(x-1)} - \frac{2}{9}\ln|x+2|\right].$
11. $\int \frac{x^2+x+12}{x^3+7x^2+11x+5}\, dx.$ $\left[2\ln|x+5| - \ln|x+1| - \frac{3}{x+1}\right].$
12. $\int \frac{x+2}{x^3+x^2+5x-7}\, dx.$ $\left[\frac{3}{10}\ln|x-1| - \frac{3}{20}\ln\left(x^2+2x+7\right) + \frac{\sqrt{6}}{15}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{6}(x+1)}{6}\right)\right].$
13. $\int \frac{5x^3-5x^2-11x+5}{x^2-x-2}\, dx.$ $\left[\frac{5x^2}{2} + \ln|x-2| - 2\ln|x+1|\right].$
14. $\int \frac{7-x}{x^3-x^2+3x+5}\, dx.$ $\left[\ln\frac{|x+1|}{\sqrt{x^2-2x+5}} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-1}{2}\right)\right].$
15. $\int \frac{2x^3-2x^2+4x-4}{x^4+4}\, dx.$ $\left[\frac{1}{2}\ln\left[\left(x^2-2x+2\right)\left(x^2+2x+2\right)\right] - 2\operatorname{arctg}(x+1)\right].$
16. $\int x\operatorname{arctg}x\, dx.$ $\left[\frac{1}{2}x^2\operatorname{arctg}x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}x\right].$

17. $\int x^2 e^{3x}\,dx.$ $\left[\frac{e^{3x}}{27}(9x^2-6x+2)\right].$

18. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \exp(2x)\sin x\,dx.$ $\left[\frac{2}{5}e^{\pi}+\frac{1}{5}\right].$

19. $\int x\ln x^2\,dx.$ $\left[\frac{x^2}{2}(\ln x^2-1)\right].$

20. $\int \ln(x^2+1)\,dx.$ $[x\ln(x^2+1)-2x+2\mathrm{arctg}x].$

21. $\int\limits_1^e \ln^2 x\,dx.$ $[(e-2)]$

22. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos(3x)\,dx.$ $\left[-\frac{3}{13}\left(e^{\pi}+\frac{2}{3}\right)\right].$

23. $\int x\ln(x^2-2x+5)\,dx.$

$\left[\frac{1}{2}(x^2+3)\ln(x^2-2x+5)-\frac{x^2}{2}-x+4\mathrm{arctg}\frac{(x-1)}{2}\right].$

24. $\int \ln(x^2+x-2)\,dx.$

$[x\ln(x^2+x-2)-2x-\ln|x-1|+2\ln|x+2|].$

25. $\int x^2\ln(x^2+4x+4)\,dx.$

$\left[\frac{x^3}{3}\ln(x^2+4x+4)-\frac{2}{3}\left(\frac{x^3}{3}-x^2+4x-8\ln|x+2|\right)\right].$

26. $\int x^2\mathrm{arctg}\frac{1}{x}\,dx.$ $\left[\frac{x^3}{3}\mathrm{arctg}\frac{1}{x}+\frac{x^2}{6}-\frac{1}{6}\ln(x^2+1)\right].$

27. $\int e^{\sqrt{x}}\,dx.$ $\left[2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)\right].$

28. $\int \mathrm{arctg}\frac{1}{x-1}\,dx.$ $\left[x\mathrm{arctg}\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2}\ln|x^2-2x+2|+\mathrm{arctg}\,(x-1)\right].$

29. $\int\limits_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}\,dx.$ $\left[\frac{\pi}{2}\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}+4\sqrt{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}-4\right].$

30. $\int \frac{e^x+10}{(e^{2x}-2e^x+5)}\,dx.$ $\left[2x-\ln|e^{2x}-2e^x+5|+\frac{3}{2}\mathrm{arctg}\left(\frac{e^x-1}{2}\right)\right].$

31. $\int \frac{e^x(e^x-1)}{e^{2x}+1}\,dx.$ $\left[\frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1)-\mathrm{arctg}\,(e^x)\right].$

32. $\int\limits_{\ln 3}^{\ln 5} \frac{e^{2x}+2e^x-3}{e^{2x}+e^x-6}\,dx.$ $\left[\ln\sqrt{5}\right].$

33. $\int\limits_0^{\ln 2} \frac{2e^x+3}{e^{2x}+2e^x+2}e^x\,dx.$ $[\ln 2+\mathrm{arctg}\,3-\mathrm{arctg}\,2].$

34. $\int \frac{\sin x\cos x}{\sin^2 x+\sin x+3}\,dx.$

$\left[\frac{1}{2}\ln\left(\sin^2 x+\sin x+3\right)-\frac{\sqrt{11}}{11}\mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{11}}{11}(2\sin x+1)\right)\right].$

35. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(5-\cos x)\sin x}{\cos^2 x-\cos x-2}\, dx.$ $\quad [-3\ln 2]\,.$

36. $\int \frac{\cos x}{\sin^3 x+\sin^2 x+\sin x}\, dx.$

$\left[\ln|\sin x| - \frac{1}{2}\ln|\sin^2 x + \sin x + 1| - \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2}+\sin x\right)\right)\right].$

37. $\int x\sqrt[3]{x+2}\, dx.$ $\quad \left[\frac{3}{7}\sqrt[3]{(x+2)^7} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+2)^4}\right].$

38. $\int \frac{\sqrt{x}}{x(\sqrt[3]{x}+\sqrt{x})}\, dx.$ $\quad [6\ln(1+\sqrt[6]{x})]\,.$

39. $\int \frac{x}{(1+\sqrt{x-1})}\, dx.$

$\left[\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} - x + 1 + 4\sqrt{x-1} - 4\ln\left(1+\sqrt{x-1}\right)\right].$

40. $\int\limits_{4}^{9} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\, dx.$ $\quad [7+\ln 4]\,.$

41. $\int \frac{1-\sqrt[6]{x+1}}{x+1+\sqrt[3]{(x+1)^4}}\, dx.$

$\left[\ln|x+1| - 3\ln\left|\sqrt[3]{x+1}+1\right| - 6\mathrm{arctg}\left(\sqrt[6]{x+1}\right)\right].$

42. $\int \frac{1}{x+\sqrt{2x-1}}\, dx.$ $\quad \left[2\ln\left(x+\sqrt{2x-1}\right) + \frac{2}{1+\sqrt{2x-1}}\right].$

43. $\int \frac{\sqrt{x-1}}{x+2\sqrt{x-1}}\, dx.$ $\quad \left[2\sqrt{x-1} - \ln\left(1+\sqrt{x-1}\right)^4 - \frac{2}{1+\sqrt{x-1}}\right].$

44. $\int\limits_{1}^{27} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{3+\sqrt[3]{x^2}}\, dx.$ $\quad \left[8+\frac{3\sqrt{3}\pi}{2}\right].$

45. $\int \frac{1}{\sqrt{1+x-2x^2}}\, dx.$ $\quad \left[\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\arcsin\left(\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}\right)\right)\right].$

46. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+x+1}}\, dx.$ $\quad \left[\ln\left|\frac{-x-1+\sqrt{x^2+x+1}}{1-x-\sqrt{x^2+x+1}}\right|\right].$

47. $\int\limits_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\, dx.$ $\quad [2\pi]\,.$

48. $\int \frac{1}{\sqrt{3-2x-x^2}}\, dx.$ $\quad \left[-2\mathrm{arctg}\, t,\ t = \frac{\sqrt{3-2x-x^2}-\sqrt{3}}{x}\right].$

49. $\int\limits_{0}^{4} \frac{1}{(9+x^2)\sqrt{9+x^2}}\, dx.$ $\quad \left[\frac{4}{45}\right].$

50. $\int \frac{1}{\sin x}\, dx.$ $\quad \left[\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right|\right].$

51. $\int \frac{1}{3-\cos x}\, dx.$ $\quad \left[\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{arctg}\left(\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\right)\right].$

52. $\int \frac{1}{3+\cos x+\sin x}\, dx.$ $\quad \left[\frac{2\sqrt{7}}{7}\left(\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{7}\left(2\,\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)+1\right)}{7}\right)\right].$

53. $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x - 2\sin x + 3}\, dx.$ $\left[-\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3} - 1\right)\right].$

54. $\int \frac{1+\sin x + \cos x}{1 - \sin x - \cos x}\, dx.$ $\left[2(\ln|t-1| - \ln|t| - \operatorname{arctg} t),\ t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right].$

55. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{(1+\operatorname{tg} x)^2}\, dx.$ $\left[\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right].$

56. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 3\cos^2 x + 2}.$ $\left[\frac{1}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\operatorname{tg} x\right)\right].$

57. $\int\limits_0^{\pi/2} \sin 5x \cos x\, dx.$ $[\frac{1}{6}].$

Integrovateľnosť po častiach spojitých funkcií.

V časti „Integrálny počet - Určitý integrál" sme zaviedli dolné a horné integrálne súčty, definovali sme určitý integrál ako hodnotu $\int_a^b f(x)\,dx$ takú, že $D(f,P) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq H(f,P)$, $\forall P$ delenie intervalu $\langle a,b\rangle$. Aj keď pre výpočet integrálov existuje množstvo metód je často ťažké ba dokonca nemožné vyjadriť neurčitý integrál pomocou známych funkcií a tak vypočítať presnú numerickú hodnotu odpovedajúceho určitého integrálu. Napríklad integrál

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1+x^4}dx.$$

Niektoré určité integrály vieme nájsť napríklad

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx = \ln 2,$$

ale pre praktické použitie je vhodné vedieť numerickú hodnotu $\ln 2$ s určitou presnosťou. Preto definujeme Riemannove integrálne súčty, ktoré nám ako jedna z aproximačných metód pomôžu nájsť hodnotu určitých integrálov.

Definition 99 *Nech P je delenie intervalu $\langle a,b\rangle$ a nech $f:\langle a,b\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}$ je ohraničená funkcia. Pre každé $k \in \{1,2,...,n\}$ nech $t_k \in \langle x_{k-1},x_k\rangle$ je ľubovoľný bod. Sumu $R(f,P) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\,\Delta x_k$ nazývame Riemannovým integrálnym súčtom ohraničenej funkcie f.*

Akokoľvek vyberieme body $t_k \in \langle x_{k-1},x_k\rangle$ vždy platí $D(f,P) \leq R(f,P) \leq H(f,P)$, $\forall P$ delenie intervalu $\langle a,b\rangle$. Pretože pre riemannovsky integrovateľnú funkciu f tak $D(f,P)$ ako aj $H(f,P)$ aproximujú $\int_a^b f(x)\,dx$, tak aj riemannove integrálne súčty aproximujú túto hodnotu. Teda môžme písať:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\,\Delta x_k.$$

Tento vzorec slúži ako základ pre približný výpočet určitých integrálov. Nutná podmienka integrovateľnosti funkcie hovorí, že každá spojitá funkcia na uzavretom intervale je riemannovsky integrovateľná. Najdôležitejšou vlastnosťou Riemannových integrálnych súčtov je, že aproximujú numerickú hodnotu určitého integrálu. Nasledujúca veta, ktorú uvádzame bez dôkazu je presnou matematickou formuláciou tohto tvrdenia.

Theorem 100 *Nech $f:\langle a,b\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}$ je spojitá na $\langle a,b\rangle$. K ľubovoľnému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že platí: Ak $P = \{x_0,x_1,...,x_n\}$ je nejaké delenie intervalu $\langle a,b\rangle$, ktorého každý podinterval má dĺžku menšiu ako δ a ak $x_{k-1} \leq t_k \leq x_k$ pre každé $k = 1,2,...,n$, potom pre odpovedajúci Riemannov integrálny súčet $\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\,\Delta x_k$ je splnený odhad $\left|\int_a^b f(x)\,dx - \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\,\Delta x_k\right| < \varepsilon$.*

Túto vlastnosť často zapisujeme v tvare:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|P\| \longrightarrow 0} \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\,\Delta x_k,$$

kde $\|P\|$ označuje dĺžku najväčšieho podintervalu delenia P a nazýva sa norma delenia P. Riemannove integrálne súčty však majú zmysel aj pre funkcie, ktoré nie sú nutne spojité na intervale $\langle a, b\rangle$.

Definition 101 *Nech $f : \langle a, b\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}$ je spojitá na $\langle a, b\rangle$ s výnimkou konečného počtu bodov, v ktorých má vlastné limity sprava aj zľava (okrem bodu a, v ktorom má iba limitu sprava a bodu b, v ktorom má iba limitu zľava). Potom f nazývame po častiach spojitá funkcia na $\langle a, b\rangle$.*

Nech funkcia $f : \langle a, b\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}$ je po častiach spojitá funkcia. Označme jej body nespojitosti $c_1, c_2, ..., c_n$, $a < c_1 < c_2 < ... < c_n < b$. Potom je funkcia f spojitá na každom z intervalov $(a, c_1), (c_1, c_2), ..., (c_{n-1}, c_n), (c_n, b)$. Pri výpočte integrálu $\int_{c_{k-1}}^{c_k} f(x)\,dx$ nahradíme funkciu f funkciou spojitou na intervale $\langle c_{k-1}, c_k\rangle$, ktorá je totožná s funkciou f na intervale (c_{k-1}, c_k). Potom je f integrovateľná na každom z intervalov $\langle a, c_1\rangle$, $\langle c_1, c_2\rangle$, ..., $\langle c_{n-1}, c_n\rangle$, $\langle c_n, b\rangle$ a platí

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + ... + \int_{c_n}^{b} f(x)\,dx.$$

Example 102 *Vypočítajte $\int_0^3 f(x)\,dx$, pričom $f(x) = \begin{cases} 1 & pre \quad x \in \langle 0, 2\rangle \\ x & pre \quad x \in (2, 3\rangle \end{cases}$.*

Solution 103 *Platí $f(2-) = \lim_{x \longrightarrow 2^-} f(x) = 1$, a $f(2+) = \lim_{x \longrightarrow 2^+} f(x) = 2$, vidíme, že funkcia f je spojitá s výnimkou bodu $x = 2$ t.j. je po častiach spojitá a teda integrovateľná. Potom $\int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^2 f(x)\,dx + \int_2^3 f(x)\,dx = \int_0^2 1dx + \int_2^3 xdx = 2 + \frac{5}{2} = \frac{9}{2}$.$\square$*

Aplikácie integrálneho počtu.
Plošný obsah rovinných útvarov.

Definition 104 *Nech* $f, g : \langle a, b\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}$ *sú spojité funkcie. Nech* R *je rovinný útvar ohraničený zhora a zdola grafmi* f *a* g *a zľava a sprava priamkami* $x = a$ *a* $x = b$. *Potom* R *nazývame rovinným útvarom medzi grafmi* f *a* g *na intervale* $\langle a, b\rangle$ *a jeho plocha* A *je definovaná vzťahom* $A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$.

Example 105 *Nech* $f, g : \langle -1, 1\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}$, $f(x) = x^3 + x^2 + 1$, $g(x) = x^3 + x + 1$.*Nájdite plochu útvaru medzi grafmi* f *a* g *na* $\langle -1, 1\rangle$.

Solution 106 *Podľa definície máme*

$$A = \int_{-1}^{1} |f(x) - g(x)|\, dx = \int_{-1}^{1} \left|x^3 + x^2 + 1 - x^3 - x - 1\right| dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} \left|x^2 - x\right| dx = \int_{-1}^{0} \left(x^2 - x\right) dx + \int_{0}^{1} \left(x - x^2\right) dx = 1.\square$$

Niekedy môžeme namiesto útvaru medzi grafmi funkcií f, g závislých od premennej x skúmať aj plochu útvaru medzi grafmi funkcií závislých od premennej y: $\int_c^d |f(y) - g(y)|\, dy$.

Objem priestorových útvarov.

Uvažujme trojrozmerné teleso D, ktoré môžme popísať nasledujúcim spôsobom: pre každé $x \in \langle a, b\rangle$ priesečníkom roviny kolmej na os o_x v bode x s telesom D je rovinný útvar s plošným obsahom vyjadreným funkciou $A(x)$.

Definition 107 *Nech teleso* D *má plochu kolmého rezu definovanú funkciou* $A : \langle a, b\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}$ *a predpokladáme, že* $A(x)$ *je spojitá na* $\langle a, b\rangle$. *Potom objem* V *telesa* D *definujeme:* $V = \int_a^b A(x)\, dx$.

Example 108 *Ukážte, že objem rotačného kužeľa s výškou* h *a polomerom základne* r *je daný vzťahom* $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

Solution 109 *Najskôr nájdeme plochu kolmého rezu rotačného kužeľa. Je zrejmé, že kolmým rezom bude kruh s polomerom* $r(x)$, *ak projekciu kužeľa umiestnime do kartézskeho súradnicového systému* $[0, x, y]$ *tak, že jeho vrchol je v začiatku a os rotačného kužeľa je totožná s kladným smerom osi* o_x, *potom z podobnosti trojuholníkov dostaneme:* $\frac{r(x)}{x} = \frac{r}{h} \Longrightarrow r(x) = \frac{r}{h}x$

a plocha kolmého rezu je

$A(x) = \pi r^2(x) = \pi \frac{r^2}{h^2} x^2$,

potom

$V = \int_0^h \pi \frac{r^2}{h^2} x^2 dx = \pi \frac{r^2}{h^2} \int_0^h x^2 dx = \frac{1}{3}\pi r^2 h.\square$

Ak graf spojitej nezápornej funkcie $f : \langle a, b\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}$ rotuje okolo osi o_x, vytvára teleso s plochou kolmého rezu

$$A(x) = \pi f^2(x).$$

Potom z predchádzajúcej definície plynie, že

$$V = \int_a^b A(x)\,dx = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx.$$

Definition 110 *Nech $f, g : \langle a, b\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}$ sú spojité funkcie a $0 \leq g(x) \leq f(x),\ x \in \langle a, b\rangle$. Nech R je obrazec medzi grafmi f a g na $\langle a, b\rangle$. Potom objem V telesa, ktoré vznikne rotáciou obrazca R okolo osi o_x definujeme $V = \pi \int_a^b \left[f^2(x) - g^2(x)\right] dx$.*

Dĺžka krivky.

Definition 111 *Nech $f : \langle a, b\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}$ je spojite diferencovateľná funkcia. Potom dĺžku krivky l, ktorú vytvára graf funkcie f medzi bodmi $(a, f(a))$ a $(b, f(b))$ definujeme $l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$.*

Example 112 *Vypočítajte dĺžku krivky danej grafom funkcie $f(x) = \ln x$, $x \in \left\langle \sqrt{3}, \sqrt{8}\right\rangle$.*

Solution 113 *Funkcia $f(x) = \ln x$ je na intervale $\left\langle \sqrt{3}, \sqrt{8}\right\rangle$ spojite diferencovateľná a platí $f'(x) = \frac{1}{x}$. Potom dĺžka krivky, ktorú vytvára graf funkcie f na intervale $\left\langle \sqrt{3}, \sqrt{8}\right\rangle$ je definovaná:* $l = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2}\,dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\,dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{\left(1+x^2\right)}{x^2} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx =$

$$= \left| \begin{array}{c} t = \sqrt{1+x^2} \Longrightarrow dt = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx \Longrightarrow dt = \frac{x\sqrt{1+x^2}}{1+x^2}dx \\ x = \sqrt{3} \Longrightarrow t = 2,\ x = \sqrt{8} \Longrightarrow t = 3 \end{array} \right| = \int_2^3 \frac{t^2}{t^2-1}\,dt =$$

$$= \int_2^3 1\,dt + \int_2^3 \frac{1}{(t-1)(t+1)}\,dt = 1 + \frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right]_2^3 = 1 + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.\square$$

Cvičenia.

1. Vypočítajte integrál $\int_0^4 f(x)dx$, ak $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{pre} \quad x \in \langle 0,2) \\ 3 & \text{pre} \quad x \in \langle 2,3) \\ 4-x & \text{pre} \quad x \in \langle 3,4 \rangle \end{cases}$. $\left[\frac{37}{6}\right]$

2. Vypočítajte integrál $\int_0^{1+\frac{\pi}{2}} f(x)dx$, ak $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{pre} \quad x \in \langle 0,\frac{\pi}{4}) \\ x & \text{pre} \quad x \in \langle \frac{\pi}{4},1) \\ \cos(x-1) & \text{pre} \quad x \in \langle 1, 1+\frac{\pi}{2} \rangle \end{cases}$. $\left[\frac{3-\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi^2}{32}\right]$

3. Vypočítajte plošný obsah rovinnej oblasti ohraničenej krivkami:

   (a) $y = x\ln x,\ x = \frac{1}{2},\ x = 2,\ y = 0.$ $\left[-\frac{9}{16} + \frac{15}{8}\ln 2\right]$.

   (b) parabolou $y = x^2 - 6x + 8$ a jej dotyčnicami v bodoch $A = [1,3]$, $B = [4,0]$. $\left[\frac{9}{4}\right]$.

   (c) parabolami $y = x^2, y = \sqrt{x}$. $\left[\frac{1}{3}\right]$.

4. Vypočítajte plošný obsah rovinnej oblasti ohraničenej krivkami:

   (a) $y = \frac{27}{x^2+9},\ y = \frac{x^2}{6}.$ $\left[\frac{3}{2}(3\pi - 2)\right]$.

   (b) $y = \ln x,\ y = \ln^2 x.$ $[3 - e]$.

5. Vypočítajme plošný obsah rovinnej oblasti ohraničenej krivkami:

   (a) $y = x - 1, y^2 = 2x + 1.$ $\left[\frac{16}{3}\right]$.

   (b) $y = x^2,\ y = \frac{1}{2}x^2,\ y = 2.$ $\left[\frac{8}{3}\left(2 - \sqrt{2}\right)\right]$.

6. Kruh $x^2 + y^2 = 8$ je rozdelený parabolou $y = \frac{x^2}{2}$ na dve časti. Vypočítajme plošný obsah menšej z nich. $\left[2\pi + \frac{4}{3}\right]$.

7. Vypočítajte plošný obsah rovinnej oblasti ohraničenej čiarami $yx = 4,\ x+y = 5$. Načrtnite obrázok! $\left[\frac{15}{2} - 2\ln 8\right]$

8. Vypočítajte plošný obsah rovinnej oblasti ohraničenej čiarami $y = 0,\ y = xe^{-2x}$ na $\langle 0, \frac{1}{2} \rangle$. Načrtnite obrázok! $\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{2e}\right]$

9. Vypočítajte objem zrezaného kužeľa, ktorý vznikne rotáciou elementárnej oblasti okolo osi o_x. Polomery jeho podstáv sú $r = 1,\ R = 2$ a výška $v = 3$. $[7\pi]$.

10. Vypočítajme objem telesa, ktoré vznikne rotáciou oblasti okolo osi o_x. Oblasť je určená čiarami $y = \frac{2x}{\pi},\ y = \sin x,\ x \geq 0.$ $\left[\frac{\pi^2}{12}\right]$.

11. Vypočítajme objem telesa, ktoré vznikne rotáciou oblasti okolo osi o_x. Oblasť je určená čiarami $y = \sin x,\ y = \frac{2x}{\pi}.$ $\left[\frac{\pi^2}{6}\right]$.

12. Zistite plochu kolmého rezu a vypočítajte objem gule s polomerom r. $\Big[A(x) = \pi r^2(x) = \pi(r^2 - x$

13. Zistite plochu kolmého rezu a vypočítajte objem pravidelného štvorbokého ihlana so základňou dĺžky a a výškou h. $\left[A(x) = a^2(x) = \frac{a^2x^2}{h^2}. Potom V = \int_0^h \frac{a^2x^2}{h^2}dx = \frac{1}{3}a^2h.\right]$

14. Vypočítajte objem telesa, ktoré vznikne rotáciou rovinnej oblasti ohraničenej čiarami $y = 1 - x^2,\ y = x^2$ okolo osi o_x. $\left[\frac{2\sqrt{2}\pi}{3}\right]$

15. Vypočítajte dĺžku krivky $y = 2\sqrt{x}$, $1 \leq x \leq 2$. $\left[\sqrt{6} - \sqrt{2} + \frac{1}{2}\ln\frac{2\sqrt{6}+5}{2\sqrt{2}+3}\right]$

16. Vypočítajte dĺžku krivky $y = \ln\frac{e^x+1}{e^x-1},\ x \in \langle \ln 2, \ln 5\rangle$. $\left[\ln\frac{16}{5}\right]$

Part II

Matematická analýza II

Chapter 2 DIFERENCIÁLNY A INTEGRÁLNY POČET FUNKCIí VIAC PREMENNÝCH.

Priestory R^n a množiny.

V tejto časti sa budeme zaoberať funkciami viacerých premenných. Budeme pracovať s priestorom (množinou bodov)

$$\boldsymbol{R}^n = \left\{ \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)^T : x_i \in \boldsymbol{R},\ \forall i = 1, 2, ..., n \right\}.$$

Priestor $\boldsymbol{R}^n$ môžme uvažovať ako

- vektorový (lineárny) priestor, keď prvky z $\boldsymbol{R}^n$ považujeme za vektory
- bodový priestor, keď jeho prvky považujeme za body.

Pre prvky z $\boldsymbol{R}^n$ máme:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \ \Leftrightarrow\ x_i = y_i,\ \forall i = 1, 2, \ldots, n.$$

V množine $\boldsymbol{R}^n$ definujeme operácie sčítania dvoch prvkov a násobenia prvku skalárom po zložkách, t.j. ak $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^n$, $\alpha \in \boldsymbol{R}$, tak

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)^T \in \boldsymbol{R}^n$$

$$\alpha \boldsymbol{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)^T \in \boldsymbol{R}^n,$$

pre rozdiel

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} + (-1)\boldsymbol{y},$$

potom $\boldsymbol{R}^n$ s operáciou sčítania dvoch prvkov a násobenia prvku skalárom je lineárny (vektorový) priestor nad $\boldsymbol{R}$.

Pretože matematická analýza sa zaoberá pojmami spojitosti a diferencovateľnosti funkcií, dôležitý je pojem limity. V $\boldsymbol{R}^n$ pojem limity definujeme pomocou vzdialenosti dvoch prvkov z $\boldsymbol{R}^n$ a vzdialenosť definujeme pomocou skalárneho súčinu.

Definition 114 *Skalárny súčin prvkov $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^n$ je zobrazenie*

$$\cdot : \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$$

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

s vlastnosťami

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} \geq 0, \text{ kde rovnosť nastane vtedy a len vtedy ak } \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}, \tag{(i)}$$

$$(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{z} + \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{z}, \tag{(ii)}$$

$$(\alpha \boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{y} = \alpha \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y},\ \forall \alpha \in \boldsymbol{R}, \tag{(iii)}$$

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{x}. \tag{(iv)}$$

Definition 115 *Normou (absolútnou hodnotou) prvku* $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ *nazývame nezáporné reálne číslo*

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Ak $n = 1$, normou prvku $x = \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}$ je $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}} = \sqrt{x^2} = |x|$, t.j. vzdialenosť bodu od začiatku súradnicovej sústavy. Podobne v priestoroch $\boldsymbol{R}^2$ a $\boldsymbol{R}^3$ norma prvku znamená jeho vzdialenosť od začiatku súradnicovej sústavy (podľa Pytagorovej vety). Takú istú interpretáciu normy budeme mať na mysli aj pre priestory $\boldsymbol{R}^n$ a danú normu budeme volať euklidovskou normou prvku $\boldsymbol{x}$. Nech pre $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^n$ platí $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = 0$, vtedy hovoríme, že prvky $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$ sú ortogonálne. Pre ľubovoľné ortogonálne vektory $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^n$ ľahko možno overiť platnosť rovnosti:

$$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2$$

známej pod názvom Pytagorova veta, pre každé $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^n$ platí

$$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|^2 + \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^2 = 2\|\boldsymbol{x}\|^2 + 2\|\boldsymbol{y}\|^2$$

známa pod názvom rovnobežníková rovnosť.

Theorem 116 *(Schwarzova nerovnosť) Pre každé* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^n$ *platí* $|\,|\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}| \leq \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$.

Theorem 117 *Pre každé* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^n$ *a* $\alpha \in \boldsymbol{R}$ *platí*

$$\|\boldsymbol{x}\| \geq 0 \text{ a rovnosť nastáva} \Leftrightarrow \text{ ak } \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \tag{(a)}$$

$$\|\alpha \boldsymbol{x}\| = |\alpha|\|\boldsymbol{x}\| \tag{(b)}$$

$$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| = \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}\| \tag{(c)}$$

$$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\| \;-\; \text{trojuholníková nerovnosť} \tag{(d)}$$

$$|\|\boldsymbol{x}\| - \|\boldsymbol{y}\|| \leq \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|\,. \tag{(e)}$$

Definition 118 *Nech* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^n$ *sú ľubovoľné. Vzdialenosťou prvkov* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ *nazývame číslo* $d : X \times X \longrightarrow \boldsymbol{R}$, $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$.

Základným geometrickým pojmom, na ktorom spočíva topológia („náuka o polohe a usporiadaní geometrických útvarov v priestore“) je pojem „blízkosti“ bodov priestoru.

Definition 119 *Nech* $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{R}^n$, $\delta \in \boldsymbol{R}$, $\varepsilon > 0$. *Potom* $O_\varepsilon(\boldsymbol{a}) = \{\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^n; \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{a}\| < \varepsilon\}$ *nazývame otvoreným* ε*-okolím bodu* $\boldsymbol{a}$.

Definition 120 *Sférou so stredom v bode* $\boldsymbol{a}$ *a polomerom* ε *budeme nazývať množinu*

$$S_\varepsilon(\boldsymbol{a}) = \{\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^n; \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{a}\| = \varepsilon\}.$$

Definition 121 *Bod* $\boldsymbol{a}$ *nazývame vnútorným bodom množiny* A*, ak existuje* $\delta > 0$ *také, že* $O_{\varepsilon}(\boldsymbol{a}) \subset A$*. Množinu všetkých vnútorných bodov množiny* A *nazývame vnútrom množiny* A *a označujeme* $int(A)$*. Množinu* A *nazývame otvorená, ak každý bod z množiny* A *je vnútorný bod, t.j.* $A = int(A)$*.*

Example 122 *Množiny* $\boldsymbol{R}^n$*,* $\emptyset$ *sú otvorené množiny.*

Example 123 *Nech* $r > 0$*. Ukážeme, že* $O_r(\mathbf{0})$ *je otvorená množina.*

Solution 124 *Nech* $\boldsymbol{x} \in O_r(\mathbf{0})$ *je ľubovoľný, potom* $\|\boldsymbol{x}\| < r$*. Nech* $\delta = r - \|\boldsymbol{x}\|$*. Nech* $\boldsymbol{y} \in O_{\delta}(\boldsymbol{x})$ *je ľubovoľný prvok. Potom*

$$\|\boldsymbol{y}\| = \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}\| \leq \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{x}\| < \delta + \|\boldsymbol{x}\| = r.\square$$

Definition 125 *Nech* $A \subset \boldsymbol{R}^n$*, potom komplementom množiny* A *nazývame množinu* $A^C = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n; \boldsymbol{x} \notin A\}$*. Platí*

$$\boldsymbol{R}^n = A \cup A^C,\ A \cap A^C = \emptyset,\ (A^C)^C = A,\ A = B \Rightarrow A^C = B^C.$$

Vnútro množiny A^C *nazývame vonkajškom* A*, čo označujeme* $ext(A)$*.* $(ext(A) = int(A^C))$

Definition 126 *Množina* $A \subset \boldsymbol{R}^n$ *sa nazýva uzavretá, ak jej komplement* A^C *je otvorená množina.*

Remark 127 *Pozor, ak množina nie je uzavretá neznamená to, že je otvorená! V* $\boldsymbol{R}^n$ *nie sú iba otvorené alebo uzavreté množiny.*

Pretože $(\boldsymbol{R}^n)^C = \emptyset,\ (\emptyset)^C = \boldsymbol{R}^n$ obe množiny sú zároveň uzavreté aj otvorené.

Example 128 *Uzavretá guľa* $\overline{O_r(\mathbf{0})}$ *je uzavretá množina.*

Solution 129 *Máme ukázať, že* $A = \overline{O_r(\mathbf{0})}^C = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n; \|\boldsymbol{x}\| > r\}$ *je otvorená množina. Nech* $\boldsymbol{x}$ *je pevný prvok, pričom* $\|\boldsymbol{x}\| > r$ *a nech* $\delta = \|\boldsymbol{x}\| - r$*. Potom* $\forall \boldsymbol{y};\ \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}\| < \delta$ *máme*

$$\|\boldsymbol{y}\| \ = \ \|\boldsymbol{x} - (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})\| \geq \|\boldsymbol{x}\| - \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| > \|\boldsymbol{x}\| - \delta = r.\square$$

Definition 130 *Hovoríme, že množina* $A \subset \boldsymbol{R}^n$ *je ohraničená, ak existuje* $M > 0$ *také, že* $\|a\| \leq M$*,* $\forall a \in A$*. (Alebo že existuje* $\overline{O_M(\mathbf{0})}$ *tak, že ak* $a \in A \Rightarrow \quad a \in \overline{O_M(\mathbf{0})}$ *), teda* $A \subset \overline{O_M(\mathbf{0})}$*.*

Definition 131 *Bod* $\boldsymbol{x}$ *sa nazýva hraničný bod množiny* A*, ak každé jeho okolie obsahuje body z* A *aj z* A^C*. Množinu všetkých hraničných bodov množiny* A *nazývame hranicou* A *a označujeme* ∂A*.*

Example 132 *Nech* $r > 0$ *a* $A_1 = O_r(\mathbf{0}),\ A_2 = \overline{O_r(\mathbf{0})}$*. Ukážte, že* $\partial A_1 = \partial A_2 = S_r(\mathbf{0}),\ int(A_2) = A_1$*.*

Solution 133 *Budeme sa zaoberať s množinou A_1. Ak $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n; \|\boldsymbol{x}\| < r$, potom podľa predchádzajúceho príkladu existuje $O_{\delta_1}(\boldsymbol{x}) \subset A_1$. To znamená, že $\boldsymbol{x}$ nemôže byť hraničným bodom A_1. Ak $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n; \|\boldsymbol{x}\| > r$, potom podľa príkladu 128 existuje $O_{\delta_2}(\boldsymbol{x}) \subset (A_1)^C$. To znamená, že $\boldsymbol{x}$ nemôže byť hraničným bodom $(A_1)^C$. Teda jediná možnosť aby bol bod $\boldsymbol{x}$ hraničným bodom je, aby $\|\boldsymbol{x}\| = r$. Pre takýto bod máme ukázať, že $\forall\ \delta > 0$ platí $O_\delta(\boldsymbol{x}) \cap A_1 \neq \emptyset$, $O_\delta(\boldsymbol{x}) \cap (A_1)^C \neq \emptyset$. To však ľahko vidieť, pretože ak vezmeme body z priamky spájajúcej bod $\mathbf{0}$ s bodom $\boldsymbol{x}$, ktoré sú tvaru $\alpha\boldsymbol{x}$, $\alpha > 0$, potom ak $0 < 1 - \alpha < \frac{\delta}{r}$ máme $\|\alpha\boldsymbol{x}\| = |\alpha|\|\boldsymbol{x}\| < r$ a $\|\boldsymbol{x} - \alpha\boldsymbol{x}\| = (1-\alpha)\|\boldsymbol{x}\| < \delta$, čo implikuje $\alpha\boldsymbol{x} \in O_\delta(\boldsymbol{x}) \cap A_1$. Podobne pre $\beta\boldsymbol{x}$ s $0 < \beta - 1 < \frac{\delta}{r}$ dostaneme $\beta\boldsymbol{x} \in O_\delta(\boldsymbol{x}) \cap (A_1)^C$.* $\square$

Definition 134 *Uzáverom množiny A budeme rozumieť množinu $A \cup \partial A$ a zapisovať v tvare $\overline{A} = A \cup \partial A$.*

Ak $\boldsymbol{x} \in \overline{A}$, potom buď $\boldsymbol{x} \in A$, alebo $\boldsymbol{x} \in \partial A$, t.j. každé okolie bodu $\boldsymbol{x}$ má s množinou A neprázdny prienik. Teda $\overline{A}$ pozostáva zo všetkých bodov, ktoré nie sú vonkajšími bodmi A, (alebo nie sú vnútornými bodmi A^C) t.j. $(\overline{A})^C = int(A^C)$. Túto vlastnosť využijeme pri dôkaze nasledujúcej vety:

Theorem 135 *Množina A je uzavretá vtedy a len vtedy ak $A = \overline{A}$.*

Remark 136 *Množina nemusí byť ani otvorená ani uzavretá. Napríklad $(0,1\rangle \subset \boldsymbol{R}$ nie je otvorená, pretože bod 1 nie je jej vnútorným bodom a nie je uzavretá, pretože bod 0 nie je jej hraničným bodom. Podobne v $\boldsymbol{R}^2$ je to napríklad množina*

$$A = \langle 0,1\rangle \times (0,1) = \{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2;\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 < y < 1\},$$

pre ktorú

$$int(A) = (0,1) \times (0,1),\ \overline{A} = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle\,.$$

Definition 137 *Prstencovým ε-okolím bodu $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{R}^n$ nazývame množinu $O_\varepsilon^\circ(\boldsymbol{a}) = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n;\ 0 < \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| < \varepsilon\}$, teda $O_\varepsilon^\circ(\boldsymbol{a}) = O_\varepsilon(\boldsymbol{a}) \setminus \{\boldsymbol{a}\}$.*

Definition 138 *Bod $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{R}^n$ nazývame hromadný bod množiny $A \subset \boldsymbol{R}^n$, ak každé jeho prstencové okolie obsahuje aspoň jeden bod z A.*

Definition 139 *Bod $\boldsymbol{a} \in A$ nazývame izolovaný bod množiny $A \subset \boldsymbol{R}^n$, ak existuje $O_\varepsilon(\boldsymbol{a})$ také, že $O_\varepsilon(\boldsymbol{a}) \cap A = \{\boldsymbol{a}\}$.*

Theorem 140 *Množina A je uzavretá vtedy a len vtedy ak obsahuje všetky svoje hromadné body.*

Definition 141 *Množinu $K \subset \boldsymbol{R}^n$ nazývame kompaktá vtedy a len vtedy ak je uzavretá a ohraničená.*

Funkcie.

V tejto časti sa budeme zaoberať funkciami, ktoré zobrazujú euklidovské piestory alebo ich časti na seba.

Definition 142 *Funkcia $\boldsymbol{f}$ definovaná na množine $A\,(\subseteq \boldsymbol{R}^n)$ (definičný obor funkcie $\boldsymbol{f}$) do $\boldsymbol{R}^m$, je pravidlo, ktoré každému prvku $\boldsymbol{x} \in A$ priradí jediný prvok $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^m$, čo zapisujeme $\boldsymbol{f} : A \longrightarrow \boldsymbol{R}^m$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ a hovoríme, že $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ je obrazom prvku $\boldsymbol{x}$ funkciou $\boldsymbol{f}$. Množinu obrazov všetkých prvkov z definičného oboru funkcie budeme nazývať oborom hodnôt funkcie a zapisovať v tvare*

$$\boldsymbol{f}(A) = \{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}); \boldsymbol{x} \in A\}.$$

Pre funkciu $\boldsymbol{f} : A \longrightarrow \boldsymbol{R}^m$ máme $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y} = (y_1, y_2, ..., y_m)^T$. Komponenty y_i, ktoré sú jednoznačne určené bodom $\boldsymbol{x}$ a funkciou $\boldsymbol{f}$ definujú tak funkcie $f_i : A \longrightarrow \boldsymbol{R}$, $i = 1, 2, ..., m$, podľa pravidla, že $f_i(\boldsymbol{x}) = y_i$.Tieto funkcie sa volajú komponenty funkcie $\boldsymbol{f}$. Môžeme písať $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (f_1(\boldsymbol{x}), f_2(\boldsymbol{x}), ..., f_m(\boldsymbol{x}))$ alebo jednoducho $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, ..., f_m)^T$.

Example 143 *Nájdite definičný obor a komponenty funkcie $\boldsymbol{f}(x, y) = (x, y, x + y)^T$.*

Solution 144 *Platí: $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{R}^2 \longrightarrow \boldsymbol{R}^3$, kde*

$$\begin{aligned}
f_1 &: \boldsymbol{R}^2 \longrightarrow \boldsymbol{R},\ f_1(\boldsymbol{x}) = f_1(x, y) = x, \\
f_2 &: \boldsymbol{R}^2 \longrightarrow \boldsymbol{R},\ f_2(\boldsymbol{x}) = f_2(x, y) = y, \\
f_3 &: \boldsymbol{R}^2 \longrightarrow \boldsymbol{R},\ f_3(\boldsymbol{x}) = f_3(x, y) = x + y.\Box
\end{aligned}$$

Example 145 *Nájdite definičný obor a komponenty funkcie $\boldsymbol{f}(x) = (x, x, \sqrt{x})^T$.*

Solution 146 *Platí: $\boldsymbol{f} : \langle 0, \infty) \longrightarrow \boldsymbol{R}^3$, kde*

$$\begin{aligned}
f_1 &: \langle 0, \infty) \longrightarrow \boldsymbol{R},\ f_1(x) = x, \\
f_2 &: \langle 0, \infty) \longrightarrow \boldsymbol{R},\ f_2(x) = x, \\
f_3 &: \langle 0, \infty) \longrightarrow \boldsymbol{R},\ f_3(x) = \sqrt{x}.\Box
\end{aligned}$$

Example 147 *Nájdite definičný obor a komponenty funkcie $f(x, y, z) = xyz$.*

Solution 148 *Platí: $f : \boldsymbol{R}^3 \longrightarrow \boldsymbol{R}$, kde $f(x, y, z) = xyz.\Box$*

Example 149 *Nájdite definičný obor a komponenty funkcie $\boldsymbol{f}(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2, x_3 + x_4, x_1x_2, x_3x_4)^T$.*

Solution 150 *Platí: $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{R}^4 \longrightarrow \boldsymbol{R}^4$, kde*

$$\begin{aligned}
f_1 &: \boldsymbol{R}^4 \longrightarrow \boldsymbol{R},\ f_1(\boldsymbol{x}) = f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + x_2, \\
f_2 &: \boldsymbol{R}^4 \longrightarrow \boldsymbol{R},\ f_2(\boldsymbol{x}) = f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_3 + x_4,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_3 &: \boldsymbol{R}^4 \longrightarrow \boldsymbol{R},\ f_3(\boldsymbol{x}) = f_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2, \\
f_4 &: \boldsymbol{R}^4 \longrightarrow \boldsymbol{R},\ f_4(\boldsymbol{x}) = f_4(\boldsymbol{x}) = f_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_3x_4.\Box
\end{aligned}$$

V týchto príkladoch boli funkcie definované pomocou funkčného predpisu. Ale keby sme chceli tvrdiť, že funkcia môže byť daná iba pomocou predpisu - formuly, nebola by to pravda. Napríklad funkciu $f : \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{R}$ môžme definovať podľa pravidla: $f(x)$ je riešenie rovnice $(y^2+1)e^y = x$. Definícia tejto funkcie je tiež v poriadku, pretože $(y^2+1)e^y$ je rastúca funkcia premennej y, teda rovnica má naozaj jediné riešenie pre vhodné x, ale neexistuje predpis - formula pre $f(x)$. Je teda namieste otázka, či je predchádzajúca definícia funkcie v poriadku. Presnú definíciu funkcie dostaneme použitím pojmu grafu funkcie. Ak $\boldsymbol{f} : A\,(\subset \boldsymbol{R}^n) \longrightarrow \boldsymbol{R}^m$ je funkcia, jej graf G je množina všetkých usporiadaných dvojíc

$$G = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f}\,(\boldsymbol{x}))\,;\, \boldsymbol{x} \in A\} \subset \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^m.$$

Usporiadaná dvojica $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^m$ patrí do $G \Longleftrightarrow \boldsymbol{x} \in A \wedge\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}\,(\boldsymbol{x})$. Tak dostávame túto definíciu funkcie

Definition 151 *Funkcia $\boldsymbol{f}$ je množina usporiadaných dvojíc $G \subset \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^m$ s vlastnosťou, že ak $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in G$ a $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \in G \Longrightarrow \boldsymbol{y} = \boldsymbol{z}$. Definičným oborom $\boldsymbol{f}$ je*

$$D(\boldsymbol{f}\,) = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n;\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in G \quad \text{pre nejaké} \quad \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^m\}$$

a píšeme $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}\,(\boldsymbol{x}) \Longleftrightarrow (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in G$.

My však budeme používať aj definíciu funkcie, ktorú sme uviedli na začiatku kapitoly, lebo táto definícia je pochopiteľnejšia. Ak $\boldsymbol{f} : A\,(\subset \boldsymbol{R}^n) \longrightarrow \boldsymbol{R}^m$ je funkcia a ak $A_1 \subset A$, potom funkcia $\boldsymbol{g} : A_1 \longrightarrow \boldsymbol{R}^m$ taká, že $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}\,(\boldsymbol{x})$, $\forall \boldsymbol{x} \in A_1$ sa nazýva zúžením (reštrikciou) funkcie $\boldsymbol{f}$ na A_1, čo zapisujeme $\boldsymbol{f}\,|_{A_1}$. Podobne ak ak $A \subset A_2$ a funkcia $\boldsymbol{h} : A_2 \longrightarrow \boldsymbol{R}^m$ taká, že $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}\,(\boldsymbol{x})$, $\forall \boldsymbol{x} \in A$ sa nazýva rozšírením funkcie $\boldsymbol{f}$ na A_2. (Poznamenajme, že rozšírenie nemusí byť jediné.)

Nech $\boldsymbol{f} : A\,(\subset \boldsymbol{R}^n) \longrightarrow \boldsymbol{R}^m$. Ak $\boldsymbol{x}_1 \neq \boldsymbol{x}_2 \Longrightarrow \boldsymbol{f}\,(\boldsymbol{x}_1) \neq \boldsymbol{f}\,(\boldsymbol{x}_2)$, potom hovoríme, že $\boldsymbol{f}$ je injektívna.

Nech $\boldsymbol{f} : A \longrightarrow S$, ak $S = \boldsymbol{f}\,(A)$ hovoríme, že $\boldsymbol{f}$ je surjektívna. Ak $\boldsymbol{f} : A \longrightarrow S$ je injektívna aj surjektívna, potom hovoríme, že $\boldsymbol{f}$ je bijektívna.

Ak je daná množina usporiadaných dvojíc $G = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\}$, ktorá je grafom funkcie $\boldsymbol{f} : A\,(\subset \boldsymbol{R}^n) \longrightarrow \boldsymbol{R}^m$, potom množina usporiadaných dvojíc $\tilde{G} = \{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})\}$ *môže* byť tiež grafom nejakej funkcie, ktorú označíme $\boldsymbol{h}$. Aby $\tilde{G}$ bola grafom funkcie $\boldsymbol{h}$ je treba, aby bola splnená podmienka: ak $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_1) \in \tilde{G} \wedge (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_2) \in \tilde{G}$, potom $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_2$. To znamená, že funkcia $\boldsymbol{f}$ musí byť injektívna. Definičným oborom funkcie $\boldsymbol{h}$ je množina

$$D\,(\boldsymbol{h}) = \{\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^m;\ (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) \in \tilde{G} \text{ pre nejaké } \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n\} = \boldsymbol{f}\,(A)\,,$$

teda funkcia $\boldsymbol{f}$ musí byť surjektívna, t.j. $\boldsymbol{f}$ musí byť bijektívna. Funkciu $\boldsymbol{h}$ nazývame inverznou k funkcii $\boldsymbol{f}$ a označujeme $\boldsymbol{f}^{\,-1}$a platí $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}^{\,-1}(\boldsymbol{y}) \Longleftrightarrow \boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}\,(\boldsymbol{x})$.

Example 152 *Nech $\boldsymbol{f}\,(t) = (\cos t, \sin t)$. Nájdite definičný obor a komponenty funkcie a ukážte, že obrazom funkcie $\boldsymbol{f}$ je kružnica so stredom v začiatku súradnicového systému a s polomerom* 1*, ktorej body sa s rastúcim t vykresľujú proti smeru pohybu hodinových ručičiek.*

Solution 153 *Predpis funkcie hovorí, že* $\boldsymbol{f}$ *je vektorová funkcia. Platí:* $\boldsymbol{f}:\boldsymbol{R}\longrightarrow\boldsymbol{R}^2$, *kde* $f_1:\boldsymbol{R}\longrightarrow\boldsymbol{R}$, $f_1(t)=\cos t$, $f_2:\boldsymbol{R}\longrightarrow\boldsymbol{R}$, $f_2(t)=\sin t$ *a* $\|\boldsymbol{f}(t)\|=\sqrt{\cos^2 t+\sin^2 t}=1$, $\forall t\in\boldsymbol{R}$. *Teda oborom hodnôt funkcie* $\boldsymbol{f}$ *je kružnica so stredom v začiatku súradnicového systému s polomerom* 1. *Nech hodnoty nezávisle premennej* t *rastú. Pre každé* $t_1,t_2\in\boldsymbol{R}:t_1<t_2$ *najskôr nakreslíme bod* $\boldsymbol{f}(t_1)$, *bod* $\boldsymbol{f}(t_2)$ *nakreslíme ak prejdeme určitú vzdialenosť na jednotkovej kružnici, tak, že jej vnútro bude po našej ľavej ruke, teda jednotlivé body oboru hodnôt funkcie* $\boldsymbol{f}$ *sa vykresľujú na jednotkovej kružnici proti smeru pohybu hodinových ručičiek.* $\square$

Limita funkcie.

Analogickým spôsobom ako v matematickej analýze I zavedieme pojem limity funkcie viacerých premenných v bode.

Definition 154 *Nech* $\boldsymbol{f}:A(\subset\boldsymbol{R}^n)\longrightarrow\boldsymbol{R}^m$. *Ak* $\boldsymbol{a}\in\boldsymbol{R}^n$ *je hromadným bodom množiny* A, *hovoríme, že limita* $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, *ak sa* $\boldsymbol{x}$ *blíži ku* $\boldsymbol{a}$ *sa rovná* $\boldsymbol{b}\in\boldsymbol{R}^m$ *a zapisujeme* $\lim_{\boldsymbol{x}\longrightarrow\boldsymbol{a}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{b}$ *vtedy a len vtedy ak* $\forall O_\varepsilon(\boldsymbol{b})\ \exists O_\delta^\circ(\boldsymbol{a});\ \boldsymbol{f}(O_\delta^\circ(\boldsymbol{a})\cap A)\subset O_\varepsilon(\boldsymbol{b})$.

Túto definíciu môžme prepísať pomocou nerovností do nasledujúceho tvaru

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0;\ \boldsymbol{x}\in A\wedge 0<\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|<\delta\Longrightarrow 0<\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{b}\|<\varepsilon.$$

Remark 155 *V predchádzajúcej definícii sme žiadali, aby bod* $\boldsymbol{a}$ *bol hromadným bodom množiny* A, *to znamená, že bod* $\boldsymbol{a}$ *nemusí byť bodom množiny* A.*Definíciu limity funkcie v bode budeme používať oboch formuláciách, pomocou okolí ako aj s ňou ekvivalentnú definíciu pomocou nerovností.*

Example 156 *Nech* $f:\boldsymbol{R}^n\longrightarrow\boldsymbol{R}$, $f(\boldsymbol{x})=\|\boldsymbol{x}\|$. *Potom* $\lim_{\boldsymbol{x}\longrightarrow\boldsymbol{a}}\|\boldsymbol{x}\|=\|\boldsymbol{a}\|$.

Solution 157 *Platí*

$$\|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{a})\|=|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{a})|=|\|\boldsymbol{x}\|-\|\boldsymbol{a}\||\leq\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|,$$

teda ak v definícii limity funkcie zvolíme $\varepsilon>0$ *a* $\delta=\varepsilon$, *potom ak*

$$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|<\delta\Longrightarrow|\|\boldsymbol{x}\|-\|\boldsymbol{a}\||=\|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{a})\|<\varepsilon,$$

t.j. $\lim_{\boldsymbol{x}\longrightarrow\boldsymbol{a}}\|\boldsymbol{x}\|=\|\boldsymbol{a}\|.\square$

Example 158 *Nech* $\pi_i:\boldsymbol{R}^n\longrightarrow\boldsymbol{R}$, $\pi_i(\boldsymbol{x})=x_i$, $i=1,2,...,n$ *t.j. funkcia* π_i *je projekcia na i-tu komponentu prvku* $\boldsymbol{x}$. *Potom* $\lim_{\boldsymbol{x}\longrightarrow\boldsymbol{a}}\pi_i(\boldsymbol{x})=a_i$.

Solution 159 *Platí* $\|\pi_i(\boldsymbol{x})-\pi_i(\boldsymbol{a})\|=|\pi_i(\boldsymbol{x})-\pi_i(\boldsymbol{a})|=|x_i-a_i|\leq\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|$, *teda ak v definícii limity funkcie zvolíme* $\varepsilon>0$ *a* $\delta=\varepsilon$, *potom ak*

$$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|<\delta\Longrightarrow|x_i-a_i|=\|\pi_i(\boldsymbol{x})-\pi_i(\boldsymbol{a})\|<\varepsilon,$$

t.j. $\lim_{\boldsymbol{x}\longrightarrow\boldsymbol{a}}\pi_i(\boldsymbol{x})=a_i.\square$

Lemma 160 *Nech $\boldsymbol{f} : A\,(\subset \boldsymbol{R}^n) \longrightarrow \boldsymbol{R}^m$, $C \subset A$. Nech $\boldsymbol{a}$ je hromadným bodom množiny A aj množiny C.Nech $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{f}|_C$. Potom ak $\lim_{\boldsymbol{x}\longrightarrow\boldsymbol{a}} \boldsymbol{f}\,(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$, tak aj $\lim_{\boldsymbol{x}\longrightarrow\boldsymbol{a}} \boldsymbol{g}\,(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$ a limitu $\lim_{\boldsymbol{x}\longrightarrow\boldsymbol{a}} \boldsymbol{g}\,(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$ nazývame limitou funkcie $\boldsymbol{f}$ vzhľadom na množinu C a píšeme $\lim_{\boldsymbol{x}\longrightarrow\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}\in C} \boldsymbol{f}\,(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$.*

Remark 161 *Ak existuje $\lim_{\boldsymbol{x}\longrightarrow\boldsymbol{a}} \boldsymbol{f}\,(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$, tak pre každú podmnožinu $M \subset A$ definičného oboru funkcie $\boldsymbol{f}$, ktorej hromadným bodom je bod $\boldsymbol{a}$, platí $\lim_{\boldsymbol{x}\longrightarrow\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}\in M} \boldsymbol{f}\,(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$.*

Podľa predchádzajúcej vety sa úvahy o limite funkcie $\boldsymbol{f} : A\,(\subset \boldsymbol{R}^n) \longrightarrow \boldsymbol{R}^m$ dajú redukovať na m prípadov limít funkcií $f_i : A\,(\subset \boldsymbol{R}^n) \longrightarrow \boldsymbol{R}$, $i = 1, 2, ..., m$.

Theorem 162 *Nech $\boldsymbol{f} : A\,(\subset \boldsymbol{R}^n) \longrightarrow \boldsymbol{R}^m$ má komponenty $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, ..., f_m)^T$, a $\boldsymbol{a}$ je hromadný bod množinyA, potom $\lim_{\boldsymbol{x}\longrightarrow\boldsymbol{a}} \boldsymbol{f}\,(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b} \Leftrightarrow$ ak $\lim_{\boldsymbol{x}\longrightarrow\boldsymbol{a}} f_i\,(\boldsymbol{x}) = b_i$, $\forall i = 1, 2, ..., m$.*

Remark 163 *Tento výsledok znamená, že preto aby sme našli limitu funkcie*

$$\boldsymbol{f} : A\,(\subset \boldsymbol{R}^n) \longrightarrow \boldsymbol{R}^m$$

je nutné a stačí, vypočítať limity funkcií $f_i : A\,(\subset \boldsymbol{R}^n) \longrightarrow \boldsymbol{R}, i = 1, 2, \ldots, m$.

Theorem 164 *Nech pre $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} : A\,(\subset \boldsymbol{R}^n) \longrightarrow \boldsymbol{R}^m$ je $\lim_{\boldsymbol{x}\longrightarrow\boldsymbol{a}} \boldsymbol{f}\,(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$, $\lim_{\boldsymbol{x}\longrightarrow\boldsymbol{a}} \boldsymbol{g}\,(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}$ a nech $\alpha \in \boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{a}$ je hromadný bod množiny A. Potom*
a) $\lim_{\boldsymbol{x}\longrightarrow\boldsymbol{a}} (\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g})\,(\boldsymbol{x}) = \lim_{\boldsymbol{x}\longrightarrow\boldsymbol{a}} \boldsymbol{f}\,(\boldsymbol{x}) + \lim_{\boldsymbol{x}\longrightarrow\boldsymbol{a}} \boldsymbol{g}\,(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$,
b) $\lim_{\boldsymbol{x}\longrightarrow\boldsymbol{a}} (\alpha\boldsymbol{f})\,(\boldsymbol{x}) = \lim_{\boldsymbol{x}\longrightarrow\boldsymbol{a}} \alpha\boldsymbol{f}\,(\boldsymbol{x}) = \alpha\boldsymbol{b}$,
c) ak $m = 1$, potom $\lim_{\boldsymbol{x}\longrightarrow\boldsymbol{a}} (fg)\,(\boldsymbol{x}) = (\lim_{\boldsymbol{x}\longrightarrow\boldsymbol{a}} f\,(\boldsymbol{x}))\,(\lim_{\boldsymbol{x}\longrightarrow\boldsymbol{a}} g\,(\boldsymbol{x})) = bc$,
d) ak $m = 1$ a $c \neq 0$, potom $\lim_{\boldsymbol{x}\longrightarrow\boldsymbol{a}} \left(\frac{1}{g}\right)(\boldsymbol{x}) = \lim_{\boldsymbol{x}\longrightarrow\boldsymbol{a}} \frac{1}{g(\boldsymbol{x})} = \frac{1}{c}$.

Remark 165 *Niekedy k priestoru $\boldsymbol{R}^n$, $n \geq 2$ pridávame jeden „bod“ ∞ a priestor $\overline{\boldsymbol{R}^n} = \boldsymbol{R}^n \cup \{\infty\}$ nazývame jednobodové rozšírenie priestoru $\boldsymbol{R}^n$. Ak definujeme okolie a prstencové okolie bodu ∞ nasledujúcim spôsobom: ε-okolím bodu ∞ nazývame množinu*

$$O_\varepsilon\,(\infty) = \left\{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n;\ \|\boldsymbol{x}\| > \frac{1}{\varepsilon}\right\},$$

a prstencovým ε-okolím bodu ∞ nazývame množinu

$$O_\varepsilon^\circ\,(\infty) = O_\varepsilon\,(\infty)\,,$$

potom tvrdenia vety zostávajú v platnosti aj pre nevlastné limity

Example 166 *Nech $f : A\,(\subset \boldsymbol{R}^n) \longrightarrow \boldsymbol{R}$, $f\,(x, y) = xy$. Potom ak $\boldsymbol{x} = (x, y)$ a $\boldsymbol{a} = (a, b)$ tak $\lim_{(x,y)\longrightarrow(a,b)} f\,(x, y) = ab$.*

Solution 167 *$f(x, y) = \pi_1(x, y)\pi_2(x, y) = xy$. Podľa predchádzajúcej vety - časti c) dostávame*

$$\lim_{\boldsymbol{x}\longrightarrow\boldsymbol{a}} f\,(\boldsymbol{x}) = \lim_{(x,y)\longrightarrow(a,b)} xy = \lim_{(x,y)\longrightarrow(a,b)} \pi_1(x, y)\pi_2(x, y) = ab.\square$$

Example 168 *Nech* $f : \boldsymbol{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \longrightarrow \boldsymbol{R}$, $f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$. *Vypočítajte* $\lim_{(x,y)\longrightarrow(-1,2)} f(x,y)$.

Solution 169 *Podľa predchádzajúcej vety - časti c), d) platí*
$\lim_{(x,y)\longrightarrow(-1,2)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\longrightarrow(-1,2)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = \frac{\lim_{(x,y)\longrightarrow(-1,2)}\left(x^3+y^3\right)}{\lim_{(x,y)\longrightarrow(-1,2)}(x^2+y^2)} =$
$= \frac{(-1)^3+2^3}{(-1)^2+2^2} = \frac{7}{5}.\square$

Existuje ešte jeden spôsob kombinácie funkcií a to zložená funkcia.

Ak $\boldsymbol{f} : A(\subset \boldsymbol{R}^n) \longrightarrow \boldsymbol{R}^p$, $\boldsymbol{g} : B(\subset \boldsymbol{R}^p) \longrightarrow \boldsymbol{R}^m$ a ak $\boldsymbol{f}(A) \subset B$, potom zložená funkcia (zobrazenie) $\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f} : A(\subset \boldsymbol{R}^n) \longrightarrow \boldsymbol{R}^m$ je definovaná vzťahom $(\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f})(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))$, pre $\boldsymbol{x} \in A$.

Remark 170 *Skladanie funkcií nie je komutatívne.*

Theorem 171 *Nech* $\boldsymbol{f} : A(\subset \boldsymbol{R}^n) \longrightarrow \boldsymbol{R}^m$ *a* $\boldsymbol{g} : B(\subset \boldsymbol{R}^p) \longrightarrow \boldsymbol{R}^m$ *pričom* $\boldsymbol{f}(A) \subset B$. *Nech* $\lim_{\boldsymbol{x}\longrightarrow\boldsymbol{a}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}$ *a v nejakom* $O_\delta^\circ(\boldsymbol{a})$ *platí, že* $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \neq \boldsymbol{c}$ *(*$\boldsymbol{a}$ *je hromadný bod* A, $\boldsymbol{c}$ *je hromadný bod* B*) . Ak* $\lim_{\boldsymbol{y}\longrightarrow\boldsymbol{c}} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{b}$, *potom* $\lim_{\boldsymbol{x}\longrightarrow\boldsymbol{a}} (\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f})(\boldsymbol{x}) = \lim_{\boldsymbol{x}\longrightarrow\boldsymbol{a}} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{b}$.

Example 172 *Nech* $f : A \longrightarrow \boldsymbol{R}$, $f(x,y) = \ln\frac{x}{y}$. *Nájdite definičný obor funkcie* f *a vypočítajte* $\lim_{(x,y)\longrightarrow(e,1)} f(x,y)$.

Solution 173 *Máme*

$$A = D(f) = \{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2; ((x>0) \wedge (y>0)) \vee ((x<0) \wedge (y<0))\},$$

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(e,1)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\longrightarrow(e,1)} \ln\frac{x}{y} = \ln\frac{e}{1} = 1.\square$$

Remark 174 *Pre* $f : A(\subset \boldsymbol{R}^n) \longrightarrow \boldsymbol{R}$ *sú platné všetky vety o limitách funkcie jednej reálnej premennej. Uvedieme (bez dôkazu) niektoré z nich: vetu o nerovnosti medzi limitami a vetu o nevlastných limitách.*

Theorem 175 *Nech* $f,g,h : A(\subset \boldsymbol{R}^n) \longrightarrow \boldsymbol{R}$.*Nech*

$$f(\boldsymbol{x}) \leq g(\boldsymbol{x}) \leq h(\boldsymbol{x}),\ \forall \boldsymbol{x} \in A.$$

Ak $\lim_{\boldsymbol{x}\longrightarrow\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = \lim_{\boldsymbol{x}\longrightarrow\boldsymbol{a}} h(\boldsymbol{x}) = L$, *potom* $\lim_{\boldsymbol{x}\longrightarrow\boldsymbol{a}} g(\boldsymbol{x})$ *existuje a* $\lim_{\boldsymbol{x}\longrightarrow\boldsymbol{a}} g(\boldsymbol{x}) = L$.

Example 176 *Nech* $f : \boldsymbol{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \longrightarrow \boldsymbol{R}$, $f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$. *Vypočítajme* $\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f(x,y)$.

Solution 177 *Platí*

$$0 \leq \frac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1,\ 0 \leq \frac{y^2}{x^2+y^2} \leq 1,$$

odkiaľ podľa vety o nerovnostiach medzi limitami máme:

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \left[x\frac{x^2}{x^2+y^2} + y\frac{y^2}{x^2+y^2}\right] = 0.\square$$

Theorem 178 *Nech* $f, g, h : A\,(\subset \boldsymbol{R}^n) \longrightarrow \boldsymbol{R}$.

a) Ak existuje $\lim_{\boldsymbol{x}\longrightarrow\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x})$, *tak* $\lim_{\boldsymbol{x}\longrightarrow\boldsymbol{a}} (-f)(\boldsymbol{x}) = -\lim_{\boldsymbol{x}\longrightarrow\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x})$,

b) Ak $\lim_{\boldsymbol{x}\longrightarrow\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = \infty$ *a* $\forall \boldsymbol{x} \in A$ *je* $g(\boldsymbol{x}) \geq k$, *tak* $\lim_{\boldsymbol{x}\longrightarrow\boldsymbol{a}} (f+g)(\boldsymbol{x}) = \infty$,

c) Ak $\lim_{\boldsymbol{x}\longrightarrow\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = \infty$ *a a* $\forall \boldsymbol{x} \in A$ *je* $g(\boldsymbol{x}) > k > 0$, *tak* $\lim_{\boldsymbol{x}\longrightarrow\boldsymbol{a}} (fg)(\boldsymbol{x}) = \infty$,

d) Ak $\lim_{\boldsymbol{x}\longrightarrow\boldsymbol{a}} |f|(\boldsymbol{x}) = \infty$ *a* $\forall \boldsymbol{x} \in A$ *je* $f(\boldsymbol{x}) \neq 0$, *tak* $\lim_{\boldsymbol{x}\longrightarrow\boldsymbol{a}} \left(\frac{1}{f}\right)(\boldsymbol{x}) = 0$,

e) Ak $\lim_{\boldsymbol{x}\longrightarrow\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = 0$ *a* $\forall \boldsymbol{x} \in A$ *je* $f(\boldsymbol{x}) > 0$, *tak* $\lim_{\boldsymbol{x}\longrightarrow\boldsymbol{a}} \left(\frac{1}{f}\right)(\boldsymbol{x}) = \infty$.

Example 179 *Nech* $f : \boldsymbol{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \longrightarrow \boldsymbol{R}$, $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$. *Vypočítajte* $\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f(x,y)$.

Solution 180 *Platí*

$$x^2 + y^2 > 0,\ \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \quad a \quad \lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} x^2 + y^2 = 0,$$

potom podľa časti e) predchádzajúcej vety:

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{1}{x^2+y^2} = \infty.\square$$

Theorem 181 *Nech* $\boldsymbol{f} : A\,(\subset \boldsymbol{R}^n) \longrightarrow \boldsymbol{R}^m$ *a* $\boldsymbol{a} \in \mathit{int}\,(A)$. *Ak* $\lim_{\boldsymbol{x}\longrightarrow\boldsymbol{a}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$, *tak* $\lim_{t\longrightarrow 0} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{b}$ *pre každý smer* $\boldsymbol{u}$.

Remark 182 *Opačné tvrdenie neplatí.*

Example 183 *Nech* $f : \boldsymbol{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \longrightarrow \boldsymbol{R}$, $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$. *Ukážte, že* $\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f(x,y)$ *neexistuje.*

Solution 184 *Podľa každej priamky* $M = \{\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{0} + t\boldsymbol{u} = (0,0) + t(u,v) = (tu, tv),\ t \in \boldsymbol{R}\}$, *kde* $u \neq 0$ *alebo* $v \neq 0$ *máme*

$$\lim_{t\longrightarrow 0} \frac{t^3uv^2}{t^2u^2 + t^4u^4} = \lim_{t\longrightarrow 0} t\frac{uv^2}{u^2 + t^2u^4} = 0,$$

ale ak sa blížime k bodu $\boldsymbol{a} = (0,0)$ *napríklad po krivke* $L = \left\{\boldsymbol{x}(t) = \{(t, \sqrt{t}),\ t \in \langle 0, \infty)\right\}$, *máme*

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{\left(t,\sqrt{t}\right)\longrightarrow(0,0)} \left[\frac{t^2}{t^2+t^2}\right] = \frac{1}{2},$$

čo znamená, že $\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ *neexistuje.* $\square$

Remark 185 *Z poznámky plynie, že ak pre dve podmnožiny* L, $M \subset A$ *definičného oboru funkcie* $\boldsymbol{f}$, *ktorých hromadným bodom je bod* $\boldsymbol{a}$, *platí* $\lim_{\boldsymbol{x}\longrightarrow\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}\in L} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \neq \lim_{\boldsymbol{x}\longrightarrow\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}\in M} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, *potom* $\lim_{\boldsymbol{x}\longrightarrow\boldsymbol{a}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ *neexistuje.*

Spojité funkcie.

Definition 186 *Hovoríme, že funkcia* $\boldsymbol{f} : A\,(\subset \boldsymbol{R}^n) \longrightarrow \boldsymbol{R}^m$ *je spojitá v bode* $\boldsymbol{a} \in A$, *ak pre ľubovoľné okolie* $O_\varepsilon\left(\boldsymbol{f}\,(\boldsymbol{a})\right)$ *bodu* $\boldsymbol{f}\,(\boldsymbol{a})$ *existuje také* $O_\delta\,(\boldsymbol{a})$, *že* $f\left(O_\delta\,(\boldsymbol{a}) \cap A\right) \subset O_\varepsilon\left(\boldsymbol{f}\,(\boldsymbol{a})\right)$. *Teda :*

$$\forall O_\varepsilon\left(\boldsymbol{f}\,(\boldsymbol{a})\right) \exists O_\delta\,(\boldsymbol{a})\ ;\ f\left(O_\delta\,(\boldsymbol{a}) \cap A\right) \subset O_\varepsilon\left(\boldsymbol{f}\,(\boldsymbol{a})\right).$$

Hovoríme, že $\boldsymbol{f}$ *je spojitá na* $S \subset A$, *ak je spojitá v každom bode* $\boldsymbol{a} \in S$.

Túto definíciu môžeme prepísať pomocou nerovností do nasledujúceho tvaru

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0; \forall \boldsymbol{x} \in A;\ \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| < \delta \Longrightarrow \|\boldsymbol{f}\,(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}\,(\boldsymbol{a})\| < \varepsilon.$$

Uvedená definícia sa podobá na definíciu limity funkcie v bode. Rozdiel je v tom, že v definícii spojitosti funkcie v bode nepredpokladáme, že bod $\boldsymbol{a} \in A$ je hromadný bod množiny A. Ak bod $\boldsymbol{a} \in A$ je aj hromadný bod množiny A, potom z definície spojitosti funkcie v bode ihneď dostávame tvrdenie:

Theorem 187 *(Veta o spojitosti funkcie v bode) Daná je funkcia* $\boldsymbol{f} : A\,(\subset \boldsymbol{R}^n) \longrightarrow \boldsymbol{R}^m$. *Nech* $\boldsymbol{a} \in A$ *je hromadný bod množiny A. Potom* $\boldsymbol{f}$ *je spojitá v bode* $\boldsymbol{a}$ *vtedy a len vtedy ak* $\lim_{\boldsymbol{x} \longrightarrow \boldsymbol{a}} \boldsymbol{f}\,(\boldsymbol{x})$ *existuje a platí* $\lim_{\boldsymbol{x} \longrightarrow \boldsymbol{a}} \boldsymbol{f}\,(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}\,(\boldsymbol{a})$.

Remark 188 *Ak je funkcia* $\boldsymbol{f}$ *definovaná v bode* $\boldsymbol{a} \in A$, *ktorý nie je hromadným bodom (taký bod nazývame izolovaným bodom) jej definičného oboru (množiny A), vtedy môžeme zvoliť* $O_\delta\,(\boldsymbol{a})$ *tak, že* $O_\delta\,(\boldsymbol{a}) \cap A = \{\boldsymbol{a}\}$. *Teda pre každé* $x \in O_\delta\,(\boldsymbol{a}) \cap A$ *(je to len jediné* $\boldsymbol{x}$ *a to* $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$*) platí*

$$\boldsymbol{f}\left(O_\delta\,(\boldsymbol{a}) \cap A\right) = \boldsymbol{f}\,(\boldsymbol{a}) \in O_\varepsilon\left(\boldsymbol{f}\,(\boldsymbol{a})\right),$$

pre každé $\varepsilon > 0$. *Teda* $\boldsymbol{f}$ *je v takom bode spojitá.*

Remark 189 *Treba si uvedomiť, že v* $\varepsilon - \delta$ *podmienke môže* δ *závisieť od* $\boldsymbol{a}$ *aj od* ε, *ako aj to, že spojitosť je lokálna vlastnosť závisiaca iba od chovania funkcie* $\boldsymbol{f}$ *v malom okolí bodu* $\boldsymbol{a}$.

Example 190 *Funkcie* $f : \boldsymbol{R}^n \longrightarrow \boldsymbol{R}$, $f\,(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x}\|$ *a* $\pi_i : \boldsymbol{R}^n \longrightarrow \boldsymbol{R}$, $\pi_i\,(\boldsymbol{x}) = x_i$, $i = 1, 2, ..., n$ *z príkladov v predchádzajúcej časti sú spojité funkcie.*

Solution 191 *Z príkladu 156 vieme, že* $\lim_{\boldsymbol{x} \longrightarrow \boldsymbol{a}} f\,(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{a}\| = f\,(\boldsymbol{a})$, $\forall \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{R}^n$ *teda funkcia* f *je spojitá v každom bode* $\boldsymbol{R}^n$. *Z príkladu 158 podobným spôsobom dostávame*

$$\lim_{\boldsymbol{x} \longrightarrow \boldsymbol{a}} \pi_i\,(\boldsymbol{x}) = a_i = \pi_i\,(\boldsymbol{a}), \forall \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{R}^n, \forall\, i = 1, 2, ..., n$$

t.j. každá projekcia je spojitá v každom bode z priestoru $\boldsymbol{R}^n$.

Pre spojitosť môžeme využiť všetky vety o limitách, ktoré už nebudeme dokazovať.

Theorem 192 *Nech* $\boldsymbol{f} : A\,(\subset \boldsymbol{R}^n) \longrightarrow \boldsymbol{R}^m$*.Potom sú nasledujúce tvrdenia ekvivalentné:*

(i) $\boldsymbol{f}$ *je spojitá v bode* $\boldsymbol{a} \in A$,

(ii) pre každú postupnosť $\left\{\boldsymbol{x}^{(k)}\right\}_{k=1}^{\infty} \subset A$, *takú že* $\lim_{k\longrightarrow\infty} \boldsymbol{x}^{(k)} = \boldsymbol{a} \Longrightarrow \lim_{k\longrightarrow\infty} \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}^{(k)}\right) = \boldsymbol{f}\,(\boldsymbol{a})$.

Theorem 193 *Nech* $\boldsymbol{f} : A\,(\subset \boldsymbol{R}^n) \longrightarrow \boldsymbol{R}^m$ *má komponenty* $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, ..., f_m)^T$. *Potom* $\boldsymbol{f}$ *je spojitá v bode* $\boldsymbol{a} \in A \Longleftrightarrow$ *ak je každá funkcia* f_i, $i = 1, 2, ..., m$ *spojitá v bode* $\boldsymbol{a}$.

Theorem 194 *Nech* $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} : A\,(\subset \boldsymbol{R}^n) \longrightarrow \boldsymbol{R}^m$, *sú spojité v bode* $\boldsymbol{a} \in A$. *Potom* $\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g}$, $\alpha\boldsymbol{f}$ *a pre* $m = 1$ *aj* fg *a ak* $g\,(\boldsymbol{a}) \neq 0$, *tak aj* $\frac{f}{g}$ *sú funkcie spojité v bode* $\boldsymbol{a}$.

Theorem 195 *Nech* $\boldsymbol{f} : A\,(\subset \boldsymbol{R}^n) \longrightarrow \boldsymbol{R}^p$ *a* $\boldsymbol{g} : B\,(\subset \boldsymbol{R}^p) \longrightarrow \boldsymbol{R}^m$ *pričom* $\boldsymbol{f}(A) \subset B$. *Nech* $\boldsymbol{f}$ *je spojitá v bode* $\boldsymbol{a} \in A$ *a* $\boldsymbol{g}$ *je spojitá v bode* $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{f}\,(\boldsymbol{a})$. *Potom* $\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f}$ *je spojitá v bode* $\boldsymbol{a}$.

Spojitosť a kompaktnosť.

Theorem 196 *Nech* $K \subset \boldsymbol{R}^n$ *je kompaktná množina a nech* $\boldsymbol{f} : K \longrightarrow \boldsymbol{R}^m$ *je funkcia spojitá na* K. *Potom* $\boldsymbol{f}(K)$ *je kompaktná podmožina priestoru* $\boldsymbol{R}^m$.

Remark 197 *Spojitý obraz uzavretej množiny nemusí byť uzavretá množina a ani spojitý obraz ohraničenej množiny nemusí byť ohraničená množina.*

Example 198 *a) Nech* $f : \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{R}$, $f\,(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$. *Potom* $f(\boldsymbol{R}) = \langle 0, 1)$ *nie je ani uzavretá ani otvorená,*

b) Ak $f : (0, 1) \longrightarrow \boldsymbol{R}, f(x) = \frac{1}{x}$. *Potom* $f((0, 1)) = (1, \infty)$ *nie je ohraničená.*

Definition 199 *Funkcia* $f : A\,(\subset \boldsymbol{R}^n) \longrightarrow \boldsymbol{R}$ *má na množine* A *maximum (minimum) v bode* $\boldsymbol{a} \in A$*,ak*

$$f(\boldsymbol{x}) \leq f(\boldsymbol{a}),\ (f(\boldsymbol{x}) \geq f(\boldsymbol{a}))\,,\ \forall \boldsymbol{x} \in A,$$

čo zapisujeme

$$\max_{\boldsymbol{x}\in A} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}),\ (\min_{\boldsymbol{x}\in A} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a})).$$

Definition 200 *Hovoríme, že* f *má lokálne maximum (minimum) v bode* $\boldsymbol{a}$, *ak existuje* $O_\delta\,(\boldsymbol{a})$ *také, že* $f(\boldsymbol{x}) \leq f(\boldsymbol{a})\ (f(\boldsymbol{x}) \geq f(\boldsymbol{a}))\,,\ \forall \boldsymbol{x} \in O_\delta\,(\boldsymbol{a})\,,$ *čo zapisujeme* $\max_{\boldsymbol{x}\in O_\delta(\boldsymbol{a})} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a})\ (\min_{\boldsymbol{x}\in O_\delta(\boldsymbol{a})} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}))$.

Na štúdium miním a maxím ako je nám už známe z diferenciálneho počtu funkcie reálnej premennej používame vyspelejšie techniky. Teraz sformulujeme jednu existenčnú vetu.

Theorem 201 *Nech* $f : K\,(\subset \boldsymbol{R}^n) \longrightarrow \boldsymbol{R}$ *je spojitá funkcia na kompaktnej množine* K, *potom* f *má na* K *maximum aj minimum.*

Cvičenia.

Nájdite (aj načrtnite) definičný obor funkcií :

1. $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-r^2}$, kde $r\geq 0$ je reálne číslo. $\left[D(f)=\left\{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2;\; x^2+y^2\geq r^2\right\}\right]$
2. $g(x,y)=\frac{1}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}$, kde $r\geq 0$ je reálne číslo. $\left[D(g)=\left\{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2;\; x^2+y^2<r^2\right\}\right]$
3. $f(x,y)=\ln(-x-y)$. $\left[D(f)=\left\{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2;\; x<-y\right\}\right]$
4. $f(x,y,z)=\ln(1-x^2-y^2+z^2)$. $\left[D(f)=\left\{(x,y,z)\in \boldsymbol{R}^3;\; x^2+y^2-z^2<1\right\}\right]$
5. $f(x,y,z)=\arccos(2x-1)+\sqrt{1-y^2}+\sqrt{y}+\ln(4-z^2)$.
   $\left[D(f)=\left\{(x,y,z)\in \boldsymbol{R}^3;\; 0\leq x\leq 1,\; 0\leq y\leq 1,\; -2<z<2\right\}\right]$
6. $f(x,y)=\sqrt{4-x^2-y^2+2x-4y}$. $\left[D(f)=\left\{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2;\; (x-1)^2+(y+2)^2\leq 9\right\}\right]$

   Vypočítajte limity:
7. $\lim_{(x,y)\longrightarrow(2,3)}\frac{x}{x+y}$. $\left[\frac{2}{5}\right]$
8. $\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)}\frac{x}{x+y}$. [neexistuje]
9. $\lim_{(x,y)\longrightarrow(-1,1)}\frac{x}{x+y}$. [neexistuje]
10. $\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)}\frac{y-3}{x+y-5}$. $\left[\frac{3}{5}\right]$
11. $\lim_{(x,y)\longrightarrow(2,3)}\frac{y-3}{x+y-5}$. [neexistuje]
12. $\lim_{(x,y)\longrightarrow(2,2)}\frac{x^3-y^3}{x^4-y^4}$. $\left[\frac{3}{8}\right]$
13. $\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,2)}\frac{3y^2-3xy-6y}{1-\sqrt{x-y+3}}$. [12]
14. $\lim_{(x,y)\longrightarrow(3,4)}\frac{4-\sqrt{x+3y+1}}{15-x-3y}$. $\left[\frac{1}{8}\right]$
15. $\lim_{(x,y)\longrightarrow(-2,1)}\frac{(2x+y)^2-9}{4xy+2y^2+6y}$. $[-3]$
16. $\lim_{(x,y)\longrightarrow(4,0)}\frac{\operatorname{tg}(xy)}{y}$. [4]
17. $\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)}\frac{2-\sqrt{4-xy}}{xy}$. $\left[\frac{1}{4}\right]$
18. $\lim_{(x,y,z)\longrightarrow(1,1,1)}\frac{\sin(x+y-z-1)}{x+y-z-1}$. [1]
19. $\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)}\frac{2x^3+5y^3}{x^2+y^2}$. [0]
20. $\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{xy}$. [0]
21. $\lim_{(x,y,z)\longrightarrow(0,0,0)}\frac{x+yz-xy+1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+1}-1}$. $[+\infty]$
22. $\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)}\frac{2\left(x^2+y^2\right)}{\sqrt{x^2+y^2+4}-2}$. [8]

23. $\lim_{(x,y)\longrightarrow(2,3)} \frac{\sin x+2}{(x^2-y^2+5)^2}$. $[+\infty]$

24. $\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{2xy}{xy+2x-y}$. [neexistuje]

25. $\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$. [neexistuje]

26. $\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} (1+x^2y^2)^{\frac{1}{x^2y^2}}$. $[e]$

27. $\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} (1+x^2y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$. $[1]$

28. Dodefinujte funkciu $f(x,y) = \frac{xy}{3-\sqrt{xy+9}}$ tak, aby bola v bode $(0,0)$ spojitá. $[f(0,0) = -6]$

29. Dodefinujte funkciu $f(x,y) = \frac{x^3-y^3}{x^4-y^4}$ tak, aby bola v bode $(2,2)$ spojitá. $\left[f(2,2) = \frac{3}{8}\right]$

30. Dodefinujte funkciu $f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2+x-y}$ tak, aby bola v bode $(0,0)$ spojitá. [Funkcia sa nedá dodefinovať v bode $(0,0)$ aby bola spojitá]

31. Daná je funkcia $f : \boldsymbol{R}^2 \longrightarrow \boldsymbol{R}$ predpisom

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} & (x,y) \neq (0,0) \\ 2 & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Zistite, či je v bode $(0,0)$ spojitá. [Je spojitá]

32. Daná je funkcia $f : A = \left\{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^2 : y \neq 0\right\} \longrightarrow \boldsymbol{R}$, $f(x,y) = \frac{\sin(6xy)}{y}$. Dodefinujte funkciu v bode $(3,0)$ tak, aby bola v tomto bode spojitá. $[f(3,0) = 18]$

33. Daná je funkcia $f : \boldsymbol{R}^2 \longrightarrow \boldsymbol{R}$ predpisom

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Zistite, či je f spojitá. [Je spojitá všade s výnimkou bodu $(0,0)$]

34. Daná je funkcia $f : \boldsymbol{R}^2 \longrightarrow \boldsymbol{R}$ predpisom

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy\left(x^2-y^2\right)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Zistite, či je f spojitá. [Je spojitá.]

35. Daná je funkcia $f : \boldsymbol{R}^2 \longrightarrow \boldsymbol{R}$ predpisom

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Zistite, či je f spojitá. [Je spojitá.]

36. Daná je funkcia $f : \boldsymbol{R}^2 \longrightarrow \boldsymbol{R}$ predpisom

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{(x^2+y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

Zistite, či je f spojitá. [Je spojitá všade s výnimkou bodu $(0,0)$]

37. Daná je funkcia $f : \boldsymbol{R}^2 \longrightarrow \boldsymbol{R}$ predpisom

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{x^4+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

Zistite, či je f spojitá. [Je spojitá.]

Diferencovateľné funkcie.

Deriváciou funkcie $f : A\,(\subset \boldsymbol{R}) \longrightarrow \boldsymbol{R}$ v bode a rozumieme

$$f\,'(a) = \lim_{x \longrightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

ak táto limita existuje. Táto definícia sa však nedá použiť pre funkcie definované na $\boldsymbol{R}^n$, $n > 1$, pretože delenie prvkami z $\boldsymbol{R}^n$ nie je definované. Hodnota $f\,'(a)$ nám dáva informáciu o lokálnom chovaní funkcie f v blízkosti bodu a. Derivácia definuje smernicu dotyčnice ku grafu funkcie $y = f(x)$ v bode $(a, f(a))$, ktorej rovnica je $y = f(a) + f\,'(a)(x - a)$. Ak je funkcia f diferencovateľná v bode a, potom chyba, ktorú získame aproximáciou funkcie $f(x)$ v bode a bude

$$R(x,a) = f(x) - [f(a) + f\,'(a)(x-a)] = (x-a)\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f\,'(a)\right].$$

Podľa definície $f\,'(a)$ výraz v hranatých zátvorkách má limitu rovnú 0 pre $x \longrightarrow a$. Teda

$$\left|\frac{R(x,a)}{x-a}\right| \longrightarrow 0 \quad \text{ak} \quad |x-a| \longrightarrow 0,$$

čo znamená hrubo povedané, že $R(x,a)$ konverguje k bodu 0 rýchlejšie ako $|x-a|$ ak $x \longrightarrow a$.Teda $f(a) + f\,'(a)(x-a)$ je dobrá aproximácia $f(x)$ pre $|x-a|$ malé. Tak vystihneme lokálne chovanie f pomocou lineárnej funkcie. Túto myšlienku zovšeobecníme na priestor $\boldsymbol{R}^n$. Samozrejme, že v našom popise nemôžeme použiť aproximáciu pomocou dotyčníc, ale môžeme použiť teóriu lineárnych operátorov. Pretože

$$L : \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{R},\ Lx = f\,'(a)\,x$$

definuje lineárny operátor a dobrá aproximácia hodnoty $f(x)$ v okolí bodu a má tvar $f(a) + f\,'(a)\,(x-a) = f(a) + L(x-a)$.

Spomeňme niektoré základné vlastnosti lineárnych operátorov:

Definition 202 *Funkcia $\boldsymbol{L} : \boldsymbol{R}^n \longrightarrow \boldsymbol{R}^m$ sa nazýva lineárny operátor ak pre každé $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^n$ a ľubovoľné α, $\beta \in \boldsymbol{R}$ platí*

$$\boldsymbol{L}(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}) = \alpha\boldsymbol{L}(\boldsymbol{x}) + \beta\boldsymbol{L}(\boldsymbol{y}).$$

Theorem 203 *Funkcia $L : \boldsymbol{R}^n \longrightarrow \boldsymbol{R}$ je lineárna (lineárny funkcionál) vtedy a len vtedy ak existuje prvok $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{R}^n$ taký, že*

$$L(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x},\ \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n.$$

Theorem 204 *Funkcia $\boldsymbol{L} : \boldsymbol{R}^n \longrightarrow \boldsymbol{R}^m$ je lineárny operátor vtedy a len vtedy ak existuje matica typu $m \times n$,*

$$A = (a_{ij}),\ i = 1, 2, ..., m,\ \ j = 1, 2, ..., n$$

taká, že

$$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y} \Longleftrightarrow y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k\, \forall i = 1, 2, ..., m$$

pričom $a_{ij} = L_i(\boldsymbol{e}_j)$.

Definition 205 *Nech $G \subset \boldsymbol{R}^n$ je otvorená množina. Hovoríme, že funkcia $\boldsymbol{f} : G\,(\subset \boldsymbol{R}^n) \longrightarrow \boldsymbol{R}^m$ je diferencovateľná v bode $\boldsymbol{a} \in G$, ak existuje taký lineárny operátor $\boldsymbol{L} : \boldsymbol{R}^n \longrightarrow \boldsymbol{R}^m$, že*

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{L}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}), \boldsymbol{x} \in G,$$

kde

$$\lim_{\boldsymbol{x} \longrightarrow \boldsymbol{a}} \frac{\|\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a})\|}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\|} = 0, \quad t.j. \; \lim_{\boldsymbol{x} \longrightarrow \boldsymbol{a}} \frac{\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) - \boldsymbol{L}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})\|}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\|} = 0.$$

Hovoríme, že $\boldsymbol{f}$ je diferencovateľná na G, ak je diferencovateľná v každom bode z množiny G.

Operátor $\boldsymbol{L}$ závisí od $\boldsymbol{a}$ aj od $\boldsymbol{f}$. V definícii nehovoríme, že operátor $\boldsymbol{L}$ je rovnaký pre každý bod $\boldsymbol{a}$, ale že pre pevné $\boldsymbol{a}$ nejaký operátor $\boldsymbol{L}$ existuje.

Operátor $\boldsymbol{L}$ nazývame derivácia funkcie $\boldsymbol{f}$ v bode $\boldsymbol{a}$ a píšeme $D\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{a}}$. Je jasné, že $D\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{a}}$ je definíciou určené jednoznačne.

Vynára sa otázka, prečo sme jednoducho nedefinovali $D\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{a}}$ pomocou vhodnej matice. Odpoveď je, že matica závisí od výberu bázy v danom priestore, ale operátor nie. Aj keď my budeme používať štandardnú bázu, je niekedy vhodné bázu zameniť (napríklad pri zámene premenných) a preto je vhodné vedieť, že derivácia je invariantná, t.j. pojem derivácie nezávisí od bázy. Pravdaže pri počítaní derivácie budeme hľadať maticu, ktorá operátor reprezentuje.

Example 206 *Nech $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{R}^n \longrightarrow \boldsymbol{R}^m$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}$, $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$. Potom $D\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{0}$.*

Solution 207 *Máme overiť, že $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{0} + \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})$, kde*

$$\lim_{\boldsymbol{x} \longrightarrow \boldsymbol{a}} \frac{\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) - \boldsymbol{0}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})\|}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\|} = 0.$$

Máme $\lim_{\boldsymbol{x} \longrightarrow \boldsymbol{a}} \frac{\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) - \boldsymbol{0}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})\|}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\|} = \lim_{\boldsymbol{x} \longrightarrow \boldsymbol{a}} \frac{\|\boldsymbol{c} - \boldsymbol{c}\|}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\|} = 0$,*t.j.* $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$.$\square$

Example 208 *Nech $\boldsymbol{L} : \boldsymbol{R}^n \longrightarrow \boldsymbol{R}^m$ je lineárny operátor, potom $D\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{L}$, $\forall \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{R}^n$.*

Solution 209 *Pretože platí $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{L}(\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{L}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})$, tak $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$. Vidíme, že prvý príklad je špeciálnym prípadom druhého príkladu.*

Pre funkciu $f : A\left(\subset \boldsymbol{R}^2\right) \longrightarrow \boldsymbol{R}$, A - otvorená je jej graf podmnožinou $\boldsymbol{R}^2 \times \boldsymbol{R}$, pretože

$$G(f) = \{(\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x})); \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^2\}.$$

Ak budeme písať $\boldsymbol{x} = (x, y)$ a $z = f(x, y)$, potom

$$G(f) = \{(x, y, z) \in \boldsymbol{R}^3;\; z = f(x, y)\}.$$

Toto je „plocha“ v priestore $\boldsymbol{R}^3$ taká, že $\forall (x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \longmapsto (x, y, z)$ s výškou $z = f(x, y)$ nad bodom $(x, y, 0)$. Predpokladajme, že $f : A\left(\subset \boldsymbol{R}^2\right) \longrightarrow \boldsymbol{R}$ je diferencovateľná v bode $\boldsymbol{a} = (a, b) \in A$. Potom $Df_{\boldsymbol{a}}$ je lineárny operátor z $\boldsymbol{R}^2 \longrightarrow \boldsymbol{R}$, teda je reprezentovaný maticou 1×2, t.j. $Df_{\boldsymbol{a}} = (d_1, d_2)$. Potom

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}) + (d_1, d_2)\begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} + R(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}),$$

teda hodnotu $f(\boldsymbol{x})$ môžeme dobre aproximovať výrazom $f(\boldsymbol{a})+d_1(x-a)+d_2(y-b)$. Inými slovami body na grafe funkcie f sú dobre aproximované bodmi z roviny

$$z = f(\boldsymbol{a}) + d_1(x - a) + d_2(y - b).$$

Túto rovinu nazývame dotyková rovina ku $G(f)$ v bode $(\boldsymbol{a}, f(\boldsymbol{a}))$. Tak sme pre funkciu $f : A\left(\subset \boldsymbol{R}^2\right) \longrightarrow \boldsymbol{R}$ ukázali zovšeobecnenie pojmu dotyčnice ku grafu funkcie $y = f(x)$ z diferenciálneho počtu funkcií jednej reálnej premennej.

Diferencovateľnosť funkcie f v bode $\boldsymbol{a}$ hovorí, že hodnota $f(\boldsymbol{x})$ je dobre aproximovaná pomocou $g(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}) + L(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})$ „blízko" bodu $\boldsymbol{a}$, t.j. $g(\boldsymbol{x})$ je typu $L+C$, čo nazývame afinitou. Teda pojem derivácie vedie k dobrej afinnej aproximácii funkcie f blízko bodu $\boldsymbol{a}$.

Pretože sme deriváciu definovali iba v bodoch otvorených množín, odteraz budeme predpokladať, že definičný obor funkcie G bude vždy znamenať otvorenú podmnožinu $\boldsymbol{R}^n$.

Definition 210 *Normou lineárnej funkcie $\boldsymbol{L} : \boldsymbol{R}^n \longrightarrow \boldsymbol{R}^m$ rozumieme:*

$$\|\boldsymbol{L}\| = \sup_{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}} \frac{\|\boldsymbol{L}\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}.$$

Jednoduchý ale dôležitý dôsledok diferencovateľnosti je spojitosť.

Theorem 211 *Nech $\boldsymbol{f} : G\,(\subset \boldsymbol{R}^n) \longrightarrow \boldsymbol{R}^m$ je funkcia diferencovateľná v bode $\boldsymbol{a} \in G$. Potom $\boldsymbol{f}$ je spojitá v bode $\boldsymbol{a}$.*

V dôkaze predchádzajúcej vety je obsiahnutý aj nasledujúci výsledok:

Theorem 212 *Nech $\boldsymbol{f} : G\,(\subset \boldsymbol{R}^n) \longrightarrow \boldsymbol{R}^m$ je diferencovateľná v bode $\boldsymbol{a} \in G$. Potom $\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0$, $(\delta\,(\boldsymbol{a}))$; také že*

$$\|\boldsymbol{f}\,(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}\,(\boldsymbol{a})\| \leq (\|D\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{a}}\| + \varepsilon)\,\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\|\,;\ \forall \boldsymbol{x};\ \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| < \delta.$$

Derivácie.

Nech $\boldsymbol{e} \in \boldsymbol{R}^n$, $\|\boldsymbol{e}\| = 1$, je smerový vektor priamky, ktorá prechádza bodom $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{R}^n$, ktorej parametrické rovnice sú: $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}+t\boldsymbol{e}, t \in \boldsymbol{R}$. Nech $\boldsymbol{f} : G\,(\subset \boldsymbol{R}^n) \longrightarrow \boldsymbol{R}^m$, G otvorená je funkcia diferencovateľná v bode $\boldsymbol{a} \in G$. Potom existuje $\delta > 0$ také, že časť priamky t.j. množina všetkých bodov tvaru $M = \{\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{e}, t \in (-\delta, \delta)\} \subset G$. Potom máme:

$$\boldsymbol{f}\,(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{e}) - \boldsymbol{f}\,(\boldsymbol{a}) = D\boldsymbol{f}_{\,\boldsymbol{a}}(t\boldsymbol{e}) + \boldsymbol{R}(t) = tD\boldsymbol{f}_{\,\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{e}) + \boldsymbol{R}(t),$$

kde

$$\lim_{t\longrightarrow 0} \frac{\|\boldsymbol{R}(t)\|}{\|\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{e} - \boldsymbol{a}\|} = \lim_{t\longrightarrow 0} \frac{\|\boldsymbol{R}(t)\|}{|t|\,\|\boldsymbol{e}\|} = \lim_{t\longrightarrow 0} \frac{\|\boldsymbol{R}(t)\|}{|t|} =$$

$$= \lim_{t\longrightarrow 0} \frac{\|\boldsymbol{f}\,(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{e}) - \boldsymbol{f}\,(\boldsymbol{a}) - tD\boldsymbol{f}_{\,\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{e})\|}{t} = 0.$$

Ak označíme $\boldsymbol{L} = D\boldsymbol{f}_{\,\boldsymbol{a}}$, potom pre každú komponentu máme

$$\lim_{t\longrightarrow 0} \frac{f_i(\boldsymbol{a} + t\mathbf{e}) - f_i(\boldsymbol{a})}{t} = L_i(\mathbf{e}). \tag{1}$$

Definition 213 *Nech $g : G\,(\subset \boldsymbol{R}^n) \longrightarrow \boldsymbol{R}$. Deriváciou funkcie g v smere $\boldsymbol{e}$ (smerovou deriváciou) v bode $\boldsymbol{a} \in G$ rozumieme*

$$\frac{dg}{d\boldsymbol{e}}\,(\boldsymbol{a}) = \lim_{t\longrightarrow 0} \frac{g(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{e}) - g(\boldsymbol{a})}{t}$$

ak existuje konečná limita. Smerovú deriváciu označujeme $D_{\boldsymbol{e}}g(\boldsymbol{a})$ alebo $\frac{dg}{d\boldsymbol{e}}\,(\boldsymbol{a})$.

Vzťah (1) ukazuje, že ak $\boldsymbol{f}$ je diferencovateľná v bode $\boldsymbol{a}$, potom každá jej komponenta f_i má smerovú deriváciu v každom smere $\boldsymbol{e}$ v bode $\boldsymbol{a}$. (Pozor. Opačné tvrdenie neplatí!!!)

Vyberme teraz niektoré špeciálne smery $\boldsymbol{e}$ a to smery súradnicových osí, t.j. prvkov bázy $\boldsymbol{e}_i$, $i = 1, \ldots, n$. Smerovú deriváciu funkcie $g : G\,(\subset \boldsymbol{R}^n) \longrightarrow \boldsymbol{R}$ v smere $\boldsymbol{e}_i$ nazývame parciálna derivácia funkcie g podľa premennej x_i v bode $\boldsymbol{a}$ a označuje $\frac{\partial g}{\partial x_i}(\boldsymbol{a})$ alebo $D_i g(\boldsymbol{a})$.

Definition 214 *Nech $g : G\,(\subset \boldsymbol{R}^n) \longrightarrow \boldsymbol{R}$. Parciálnou deriváciou funkcie g podľa premennej x_i v bode $\boldsymbol{a} \in G$ rozumieme*

$$\frac{dg}{d\boldsymbol{e}_i}\,(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial g}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) = D_i g(\boldsymbol{a})$$

ak existuje konečná limita.

Pre parciálnu deriváciu máme:

$$\frac{\partial g\,(\boldsymbol{a})}{\partial x_i} = \lim_{t\longrightarrow 0} \frac{g(a_1, ..., a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, ..., a_n) - g(a_1, ..., a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, ..., a_n)}{t}$$

čo je vlastne obyčajná derivácia funkcie g, ktorú považujeme iba za funkciu premennej x_i podľa premennej x_i, ostatné premenné považujeme za konštanty.

Pri výpočte parciálnej derivácie funkcie g podľa premennej x_i v bode $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{R}^n$ zafixujeme ostatné premenné t.j. uvažujeme funkciu g ako funkciu jednej premennej x_i, t.j. ako funkciu h definovanú

$$h(x) = g(a_1, a_2, ..., a_{i-1}, x, a_{i+1}, ..., a_n)$$

a počítame $h'(a_i)$.

Iné označenia parciálnej derivácie, ktoré možno nájsť v literatúre okrem $\frac{\partial g(\boldsymbol{a})}{\partial x_i}$, sú $g_{.i}(\boldsymbol{a})$, $D_i g(\boldsymbol{a})$.

Theorem 215 *Nech $G \subset \boldsymbol{R}^n$ je otvorená množina a nech $\boldsymbol{f} : G\,(\subset \boldsymbol{R}^n) \longrightarrow \boldsymbol{R}^m$ je diferencovateľná v bode $\boldsymbol{a} \in G$. Potom $D\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{a}}$ reprezentuje matica typu $m \times n$, $A = (a_{ij})$, kde*

$$a_{ij} = D_j f_i(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{a}), \; 1 \le i \le m, \; 1 \le j \le n.$$

Matica (reprezentácia lineárneho operátora $D\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{a}}$) v štandardnej báze je daná:

$$[D\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{a}}] = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\boldsymbol{a})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\boldsymbol{a})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(\boldsymbol{a})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\boldsymbol{a})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\boldsymbol{a})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(\boldsymbol{a})}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m(\boldsymbol{a})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m(\boldsymbol{a})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m(\boldsymbol{a})}{\partial x_n} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Táto matica sa nazýva Jacobiho matica funkcie $\boldsymbol{f}$ v bode $\boldsymbol{a}$.

Remark 216 *Ak $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{R}^n \longrightarrow \boldsymbol{R}^n$, potom Jacobiho matica je štvorcová a jej determinant je definovaný. Determinant štvorcovej Jacobiho matice sa nazýva Jacobián funkcie $\boldsymbol{f}$ v bode $\boldsymbol{a}$ a označuje $J_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{a})$, t.j.*

$$J_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{a}) = \det [D\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{a}}] = \det \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{a}) \right].$$

Iné bežne používané označenia Jacobiho matice sú

$$\frac{\partial (f_1, f_2, ..., f_m)}{\partial (x_1, x_2, ..., x_n)} \quad alebo \quad \frac{\partial (y_1, y_2, ..., y_m)}{\partial (x_1, x_2, ..., x_n)}, \quad kde \quad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}).$$

Remark 217 *Jakobián pre funkciu $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{R}^n \longrightarrow \boldsymbol{R}^n$ často hrá takú istú úlohu ako „obyčajná" derivácia f' pre funkciu $f : \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{R}$.*

Remark 218 *Pripomeňme ešte raz: ak je funkcia $\boldsymbol{f} : G\,(\subset \boldsymbol{R}^n) \longrightarrow \boldsymbol{R}^m$ diferencovateľná, potom všetky parciálne derivácie existujú. Opačné tvrdenie neplatí!!!*

Natíska sa otázka: Ak matica (2) existuje za akých predpokladov je funkcia $\boldsymbol{f}$ diferencovateľná v bode $\boldsymbol{a}$? Ukážeme, že stačí, ak sú parciálne derivácie spojité, ale nie je to nutná podmienka. Skôr ako ukážeme toto tvrdenie, uvedieme niekoľko príkladov, ktoré budú ilustrovať fakt, že existencia parciálnych derivácií nie je dostatočná pre diferencovateľnosť. Toto však nie je prekvapujúce.

Uvažujme napríklad funkciu $f : \boldsymbol{R}^2 \longrightarrow \boldsymbol{R}$; jej grafom je nejaká plocha. Parciálna derivácia $\frac{\partial f}{\partial x}$ nám dáva lokálnu informáciu o f v smere osi x. Skutočne $f(x, a_2)$ je možné dobre aproximovať dotyčnicou s tangentou $\frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{a})$. Podobne $f(a_1, y)$ sa dá dobre aproximovať dotyčnicou s tangentou $\frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{a})$. Niet nijakého dô vodu domnievať sa, že by sme mohli povedať niečo o lokálnom chovaní funkcie f v nejakom inom smere.

Avšak, ak sú parciálne derivácie spojité v okolí bodu $\boldsymbol{a}$, tak $\frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{b})$ je „blízko“ $\frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{a})$ ak $\boldsymbol{b}$ je „blízko“ bodu $\boldsymbol{a}$; tak $\frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{a})$ dáva lokálnu informáciu o $f(x, b_2)$, podobne to platí aj o $\frac{\partial f}{\partial y}$.Celkove teda dostávame informácie o $f(x, y)$ v malom obdĺžniku okolo bodu (a_1, a_2), teda na okolí bodu $\boldsymbol{a}$ a toto nám zaručuje diferencovateľnosť.

Example 219 *Nech $f : \boldsymbol{R}^2 \longrightarrow \boldsymbol{R}$, $f(x, y) = xy$. Ukážte, že f je diferencovateľná vo všetkých bodoch z $\boldsymbol{R}^2$ a nájdite rovnicu dotykovej roviny v bode (a, b).*

Solution 220 *Máme $\frac{\partial f}{\partial x} = y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x$, teda kandidát na $Df_{(a,b)}$ je (b, a). Máme ukázať, že ak*

$$R = xy - \left[ab + (b, a)\begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix}\right], \quad \textit{potom} \quad \lim_{\boldsymbol{x} \longrightarrow \boldsymbol{a}} \frac{|R|}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\|} = 0.$$

Tak

$$R = xy - [ab + xb - ab + ya - ab] = (x - a)(y - b).$$

Z nerovnosti $2uv \leq u^2 + v^2$ dostaneme

$$|R| \leq \frac{[(x - a)^2 + (y - b)^2]}{2} = \frac{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\|^2}{2},$$

teda

$$\frac{|R|}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\|} \leq \frac{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\|}{2} \longrightarrow 0 \quad \textit{pre} \quad \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| \longrightarrow 0,$$

teda f je diferencovateľná v každom bode $\boldsymbol{a} = (a, b)$. Rovnica dotykovej roviny potom bude

$$z = f(\boldsymbol{a}) + d_1(x - a) + d_2(y - b), \quad \textit{kde} \quad (d_1, d_2) = Df_{(a,b)} = (b, a).$$

t.j.

$$z = ab + b(x - a) + a(y - b), \quad \textit{alebo} \quad z = bx + ay - ab.\square$$

Všeobecne, ak je daná funkcia $f : G\left(\subset \boldsymbol{R}^2\right) \longrightarrow \boldsymbol{R}$ diferencovateľná v bode $\boldsymbol{a} \in G$, pričom $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$, potom rovnica dotykovej roviny ku grafu funkcie f je daná vzťahom

$$z = f(a_1, a_2) + \frac{\partial f(a_1, a_2)}{\partial x}(x - a_1) + \frac{\partial f(a_1, a_2)}{\partial y}(y - a_2).$$

Z lineárnej algebry vieme, že normálový vektor ku dotykovej rovine v bode $(a_1, a_2, f(a_1, a_2))$ je vektor

$$\boldsymbol{n} = \left(-\frac{\partial f(a_1, a_2)}{\partial x}, -\frac{\partial f(a_1, a_2)}{\partial y}, 1\right).$$

Example 221 *Nech*

$$f : \boldsymbol{R}^2 \longrightarrow \boldsymbol{R},\ f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & ak \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ak \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Potom f nie je diferencovateľná v bode $(0,0)$. Nájdite $\frac{df(0,0)}{d\boldsymbol{e}}$, ak $\|\boldsymbol{e}\| = 1$.

Solution 222 *Pre $(x,y) \neq (0,0)$ máme*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y^3 - x^2 y}{(x^2+y^2)^2},\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^3 - xy^2}{(x^2+y^2)^2},$$

ale v bode $(0,0)$ máme

$$\frac{\partial f\,(0,0)}{\partial x} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \longrightarrow 0} 0 = 0$$

a podobne aj $\frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = 0$. Keby bola f diferencovateľná v bode $(0,0)$, potom by podľa vety 215 bola $Df_{(0,0)}$ reprezentovaná maticou $(0,0)$. Nech

$$R(x,y) = f(x,y) - \left[f(0,0) + (0,0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right] = \frac{xy}{x^2+y^2}, \quad pre \quad (x,y) \neq (0,0).$$

Ukážeme, že

$$\frac{|R(x,y)|}{\|\,(x,y)\|} \nrightarrow 0 \quad pre \quad \|(x,y)\| \longrightarrow 0.$$

Skutočne pre priamku $M = \{(t,t)\,;\, t \in \boldsymbol{R}\}$ máme

$$\frac{|R(x,y)|}{\|\,(x,y)\|} = \frac{\left|\frac{t^2}{2t^2}\right|}{\sqrt{t^2+t^2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}\,|t|} \longrightarrow \infty \quad ak \ t \longrightarrow 0.$$

Toto dokazuje, že f nie je diferencovateľná v bode $(0,0)$ aj keď obe parciálne derivácie existujú. Tento výsledok sme mohli dostať použitím vety 211, ktorá priamo ukazuje, že f nie je diferencovateľná v bode $(0,0)$, pretože nie je v bode $(0,0)$ spojitá. V tomto prípade funkcia f nemá deriváciu v smeroch rôznych od smerov súradnicových osí. Ak označíme $\boldsymbol{e} = (\cos\theta,\ \sin\theta)$ ľubovoľný jednotkový smerový vektor, pričom $\theta \in \langle 0, 2\pi)$, potom

$$D_{\boldsymbol{e}} f(0,0) = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{f((0,0) + t\,(\cos\theta, \sin\theta)) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{f(t\,\cos\theta, t\,\sin\theta) - f(0,0)}{t} =$$

$$= \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{\cos\theta \sin\theta}{t} = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{\sin 2\theta}{2t}$$

a táto limita existuje vtedy a len vtedy ak $\sin 2\theta = 0$, teda iba v smeroch súradnicových osí. □

Example 223 *Nech*

$$f : \boldsymbol{R}^2 \longrightarrow \boldsymbol{R},\ f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} & ak \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ak \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Potom f má v bode $(0,0)$ smerové derivácie v každom smere, ale nie je diferencovateľná v bode $(0,0)$.

Solution 224 *Pre* $t \neq 0$ *máme*

$$\frac{f(t\,\cos\theta, t\sin\theta) - f(0,0)}{t} = \cos^2\theta\sin\theta$$

teda pre každé pevné θ *derivácia v smere* $\mathbf{e}=(\cos\theta,\sin\theta)$ *existuje a je rovná výrazu* $\cos^2\theta\sin\theta$*.Ak* $\theta = 0$*, alebo* $\theta = \frac{\pi}{2}$*, tak dostaneme*

$$\frac{\partial f\,(0,0)}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial f\,(0,0)}{\partial y} = 0.$$

Nech

$$R(x,y) = f(x,y) - \left[f(0,0) + (0,0)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right] = \frac{x^2 y}{x^2+y^2}.$$

Ukážeme, že

$$\frac{|R(x,y)|}{\|(x,y)\|} \nrightarrow 0 \quad ak \quad x^2+y^2 \longrightarrow 0 \tag{3}$$

Skutočne ak $x = r\,\cos\theta$*,* $y = r\sin\theta$*, potom*

$$\frac{|R(x,y)|}{\|(x,y)\|} = \cos^2\theta\sin\theta \quad pre\ každé \quad r \neq 0.$$

Limita pre $r \longrightarrow 0$ *existuje pre* θ *pevné a závisí od* θ*, preto limita v (3) neexistuje. Pritom* f *je funkcia spojitá vo všetkých bodoch z* $\boldsymbol{R}^2$.$\square$

Theorem 225 *Nech* $G \subset \boldsymbol{R}^n$ *je otvorená množina a* $\boldsymbol{f} : G\,(\subset \boldsymbol{R}^n) \longrightarrow \boldsymbol{R}^m$*. Predpokladajme, že všetky parciálne derivácie* $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ *existujú v nejakom okolí bodu* $\boldsymbol{a} \in G$ *a sú spojité v bode* $\boldsymbol{a}$*. Potom* $\boldsymbol{f}$ *je diferencovateľná v bode* $\boldsymbol{a}$*.*

Definition 226 *Ak* $\boldsymbol{f} : G\,(\subset \boldsymbol{R}^n) \longrightarrow \boldsymbol{R}^m$ *má všetky parciálne derivácie* $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ *spojité na* G*, hovoríme, že* $\boldsymbol{f}$ *je spojite diferencovateľná na* G*. Budeme písať* $\boldsymbol{f} \in C^1(G, \boldsymbol{R}^m)$*, alebo ak* $m = 1$ *jednoducho* $f \in C^1(G)$ *a hovoriť, že* f *je triedy* C^1 *na* G*.*

Cvičenia.

1. Vypočítajte rovnicu dotykovej roviny a normály ku grafu funkcie $f(x, y) = 2x^2 + y^2$ v bode $T = (1, 1, ?)$.

   $[T = (1, 1, 3), \tau : 4x + 2y - z - 3 = 0, n : x = 1 - 4t,\ y = 1 - 2t,\ z = 3 + t]$

2. Napíšte rovnicu dotykovej roviny ku grafu funkcie $f(x, y) = x^4 + 2x^2y - xy + x$ v bode $T = (1, ?, 2)$.

   $[T = (1, 0, 2), \tau : 5x + y - z - 3 = 0, n : x = 1 - 5t,\ y = 0 - t,\ z = 2 + t]$

3. Vypočítajte rovnicu dotykovej roviny a normály ku grafu funkcie $f(x, y) = xy$ v bode $T = (?, 2, 2)$.

   $[T = (1, 2, 2), \tau : 2x + y - z - 2 = 0, n : x = 1 - 2t, y = 2 - t, z = 2 + t.]$

4. Napíšte rovnicu dotykovej roviny ku ploche $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ v bode $T = (1, -1, 1)$. $[\tau : x - 2y + 3z - 6 = 0,\ \boldsymbol{n} = (1, -2, 3),\ n : x = 1 - t,\ y = -1 + 2t,\ z = 1 - 3t]$

5. Ukážte, že plochy $x^2 - xy - 8x + z + 5 = 0$ a $4 + x + 2y = \ln z$ sa dotýkajú v bode $T = (2, -3, 1)$.

   $[\tau : x + 2y - z + 5 = 0, \sigma : x + 2y - z + 5 = 0]$.

Diferencovanie funkcií.

Theorem 227 *(Veta o diferencovaní súčtu funkcií a násobku funkcie) Nech* $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} : A\,(\subset \boldsymbol{R}^n) \longrightarrow \boldsymbol{R}^m$ *sú diferencovateľné v bode* $\boldsymbol{a} \in G$. *Potom aj funkcie* $\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g}$, $\alpha \boldsymbol{f}$ $(\alpha \in \boldsymbol{R})$ *sú diferencovateľné v bode* $\boldsymbol{a}$ *a platí*

$$D\left(\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g}\right)_{\boldsymbol{a}} = D\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{a}} + D\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{a}},$$

$$D\left(\alpha \boldsymbol{f}\right)_{\boldsymbol{a}} = \alpha D\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{a}}.$$

Teraz budeme skúmať zložené funkcie. Nech $G \subset \boldsymbol{R}^n$ a $E \subset \boldsymbol{R}^p$ sú otvorené množiny. Predpokladajme, že $\boldsymbol{f} : E \longrightarrow \boldsymbol{R}^m$, $\boldsymbol{g} : G \longrightarrow \boldsymbol{R}^p$ sú také, že $\boldsymbol{g}(G) \subset E$. Potom $\boldsymbol{h} : G \longrightarrow \boldsymbol{R}^m$, $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}))$ je zložená funkcia z funkcií $\boldsymbol{f}$ a $\boldsymbol{g}$, čo zapisujeme $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g}$.

Theorem 228 *(Veta o diferencovaní zloženej funkcie) Nech* $G \subset \boldsymbol{R}^n$ *a* $E \subset \boldsymbol{R}^p$ *sú otvorené množiny. Predpokladajme, že* $\boldsymbol{f} : E \longrightarrow \boldsymbol{R}^m$, $\boldsymbol{g} : G \longrightarrow \boldsymbol{R}^p$ *sú také, že* $\boldsymbol{g}(G) \subset E$. *Nech funkcia* $\boldsymbol{h} : G \longrightarrow \boldsymbol{R}^m$, $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}))$ *je zložená funkcia. Ak* $\boldsymbol{g}$ *je diferencovateľná v bode* $\boldsymbol{x} \in G$ *a* $\boldsymbol{f}$ *je diferencovateľná v bode* $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \in E$, *potom zložená funkcia* $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g}$ *je diferencovateľná v bode* $\boldsymbol{x} \in G$ *a platí* $D\boldsymbol{h}_{\boldsymbol{x}} = D\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{y}} D\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{x}}$.

Remark 229 $D\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{y}} D\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{x}}$ *mô žme chápať buď ako zložený lineárny operátor, alebo ako súčin matíc.*

Example 230 *Nech* $\boldsymbol{g} : \boldsymbol{R}^3 \longrightarrow \boldsymbol{R}^3$, $f : \boldsymbol{R}^3 \longrightarrow \boldsymbol{R}$ *sú diferencovateľné funkcie a nech* $h = f \circ \boldsymbol{g} : \boldsymbol{R}^3 \longrightarrow \boldsymbol{R}$. *Potom* $Dh_{\boldsymbol{x}} = Df_{\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})} D\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{x}}$ *je matica typu* 1×3, *ktorú dostaneme násobením matice* 1×3 - $Df_{\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})}$ *a matice* 1×3 - $D\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{x}}$. *Vyjadrením v komponentách, potom máme*

$$\left(\frac{\partial h\left(\boldsymbol{x}\right)}{\partial x_1}, \frac{\partial h\left(\boldsymbol{x}\right)}{\partial x_2}, \frac{\partial h\left(\boldsymbol{x}\right)}{\partial x_3}\right) = \left(\frac{\partial f\left(\boldsymbol{y}\right)}{\partial y_1}, \frac{\partial f\left(\boldsymbol{y}\right)}{\partial y_2}, \frac{\partial f\left(\boldsymbol{y}\right)}{\partial y_3}\right) \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_2} & \frac{\partial g_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_3} \\ \frac{\partial g_2(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2(\boldsymbol{x})}{\partial x_2} & \frac{\partial g_2(\boldsymbol{x})}{\partial x_3} \\ \frac{\partial g_3(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial g_3(\boldsymbol{x})}{\partial x_2} & \frac{\partial g_3(\boldsymbol{x})}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

teda

$$\frac{\partial h\left(\boldsymbol{x}\right)}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial f\left(\boldsymbol{y}\right)}{\partial y_j} \frac{\partial g_j\left(\boldsymbol{x}\right)}{\partial x_i},$$

kde $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$, $i = 1, 2, 3$. *Častejšie sa používa alternatívne označenie*

$$\frac{\partial h}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial y_1}\frac{\partial g_1}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial y_2}\frac{\partial g_2}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial y_3}\frac{\partial g_3}{\partial x_i},\ i = 1, 2, 3 \tag{1}$$

Vzťah (1) sa dá ľahšie zapamätať v nepresnejšej forme. Ak napíšeme $u = h(\boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$, *potom položíme* $u = f(\boldsymbol{y})$ *a píšeme*

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial y_3}\frac{\partial y_3}{\partial x_i}. \tag{2}$$

Posledný vzťah sa nazýva reťazové pravidlo.

Example 231 *Nech* $\boldsymbol{g}(x,y) = (x^2 - y^2 + xy, y^2 - 1)$ *a* $\boldsymbol{f}(u,v) = (u+v, 2u, v^2)$. *Ukážte, že* $\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{f}$ *sú diferencovateľné,* $\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g}$ *existuje a vypočítajte deriváciu funkcie* $\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g}$ *v bode* $(1,1)$

a) priamo,

b) pomocou reťazového pravidla.

Solution 232 *a)* $\boldsymbol{g}(x,y) = (g_1(x,y), g_2(x,y))$, $g_1(x,y) = x^2 - y^2 + xy$, $g_2(x,y) = y^2 - 1$. *Potom*

$$\frac{\partial g_1}{\partial x} = 2x + y, \frac{\partial g_1}{\partial y} = -2y + x, \ \frac{\partial g_2}{\partial x} = 0, \ \frac{\partial g_2}{\partial y} = 2y.$$

Každá parciálna derivácia je evidentne spojitá, teda $\boldsymbol{g} \in C^1(\boldsymbol{R}^2, \boldsymbol{R}^2)$ *a teda je diferencovateľná. Podobne* $\boldsymbol{f} \in C^1(\boldsymbol{R}^2, \boldsymbol{R}^3)$. *Potom* $\boldsymbol{h} : \boldsymbol{R}^2 \longrightarrow \boldsymbol{R}^3$, $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g}$, *pretože* $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{R}^2) \subseteq \boldsymbol{R}^2$. *Potom*

$$(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})(x,y) = \boldsymbol{f}(g_1(x,y), g_2(x,y)) = (g_1 + g_2, 2g_1, g_2^2) =$$

$$= (x^2 + xy - 1, 2x^2 - 2y^2 + 2xy, y^4 - 2y^2 + 1) = (h_1, h_2, h_3).$$

Potom

$$D(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})_{(x,y)} = D\boldsymbol{h}_{(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial h_1(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial h_2(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial h_2(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial h_3(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial h_3(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y & x \\ 4x + 2y & -4y + 2x \\ 0 & 4y^3 - 4y \end{pmatrix}$$

a teda

$$D\boldsymbol{h}_{(1,1)} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Teraz použijeme reťazové pravidlo a dostaneme

$$D(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})_{(1,1)} = D\boldsymbol{f}_{(1,0)} D\boldsymbol{g}_{(1,1)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(1,0)}{\partial u} & \frac{\partial f_1(1,0)}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2(1,0)}{\partial u} & \frac{\partial f_2(1,0)}{\partial v} \\ \frac{\partial f_3(1,0)}{\partial u} & \frac{\partial f_3(1,0)}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1(1,1)}{\partial x} & \frac{\partial g_1(1,1)}{\partial y} \\ \frac{\partial g_2(1,1)}{\partial x} & \frac{\partial g_2(1,1)}{\partial y} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

teda sme dostali taký istý výsledok ako predtým. $\square$

Example 233 *Nech* $w = f(x,y,z)$ *a predpokladajme, že* $z = \Phi(x,y)$. *Vypočítajte* $\frac{\partial w}{\partial x}$ *a* $\frac{\partial w}{\partial y}$.

Solution 234 *Pretože* $z = \Phi(x,y)$, $w = f(x,y,\Phi(x,y)) = h(x,y)$ *a my chceme vypočítať* $\frac{\partial h}{\partial x}$ *a* $\frac{\partial h}{\partial x}$.*Ak budeme písať* $\boldsymbol{g}(x,y) = (x,y,\Phi(x,y))$, *potom* $h(x,y) = (f \circ \boldsymbol{g})(x,y)$ *a podľa reťazového pravidla*

$$Dh_{(x,y)} = Df_{(g_1,g_2,g_3)} D\boldsymbol{g}_{(x,y)}$$

odkiaľ

$$Dh_{(x,y)} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \\ \frac{\partial g_3}{\partial x} & \frac{\partial g_3}{\partial y} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \frac{\partial \Phi}{\partial y} \end{pmatrix},$$

odkiaľ

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad a \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial \Phi}{\partial y}.$$

Tento výsledok však mô žme dostať jednoduchšie použitím verzie reťazového pravidla z príkladu. Skutočne, ak napíšeme

$$w = f(x, y,\ \Phi(x, y))$$

dostávame $\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}.1 + \frac{\partial f}{\partial y}.0 + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial \Phi}{\partial x}.\square$

Cvičenia.

1. Vypočítajme parciálne derivácie funkcií:

2. $f(x,y) = \ln\left(\operatorname{tg}\left(\frac{x}{y}\right)\right).$ $\left[\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\sin\left(\frac{x}{y}\right)\cos\left(\frac{x}{y}\right)y}, \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{\sin\left(\frac{x}{y}\right)\cos\left(\frac{x}{y}\right)y^2}\right]$

3. $f(x,y,z) = x^3y^2z+2x-3y+z+5.$ $\left[\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y^2z + 2, \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3yz - 3, \frac{\partial f}{\partial z} = x^3y^2 + 1\right]$

4. $f(x,y,z) = \frac{x-y}{\sqrt{z}}.$ $\left[\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{z}}, \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-1}{\sqrt{z}}, \frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{x-y}{2\sqrt{z^3}}\right]$

5. $f(x,y) = \arcsin\frac{x}{2} + \sqrt{xy}.$ $\left[\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}} + \frac{1}{2\sqrt{xy}}y, \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{xy}}x\right]$

6. $f(x,y) = \ln(\sin(xy)).$ $\left[\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\cos(xy)}{\sin(xy)}y, \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\cos(xy)}{\sin(xy)}x\right]$

7. $f(x,y) = e^{\sin\frac{x}{y}}.$ $\left[\frac{\partial f}{\partial x} = e^{\sin\frac{x}{y}}\cos\left(\frac{x}{y}\right)\frac{1}{y}, \frac{\partial f}{\partial y} = -e^{\sin\frac{x}{y}}\cos\left(\frac{x}{y}\right)\frac{x}{y^2}\right].$

8. $f(x,y) = x^{xy}.$ $\left[\frac{\partial f}{\partial x} = x^{xy}y(\ln x + 1), \frac{\partial f}{\partial y} = x^{xy}(x\ln x)\right].$

9. $f(x,y) = (\ln x)^{\cos x}.$ $\left[\frac{\partial f}{\partial x} = (\ln x)^{\cos x}\left(-\sin x\ln(\ln x) + \cos x\frac{1}{\ln x}\frac{1}{x}\right), \frac{\partial f}{\partial y} = 0\right]$

10. $f(x,y,z) = ze^{x^3\ln\left(\cos\left(x-y^2\right)\right)}.$ $$\left[\begin{array}{c}\frac{\partial f}{\partial x} = ze^{x^3\ln\left(\cos\left(x-y^2\right)\right)}\left(3x^2\ln\left(\cos\left(x-y^2\right)\right) + x^3\frac{1}{x-y^2}\right), \\ \frac{\partial f}{\partial y} = ze^{x^3\ln\left(\cos\left(x-y^2\right)\right)}\left(x^3\frac{-2y}{\cos(x-y^2)}\right), \\ \frac{\partial f}{\partial z} = e^{x^3\ln\left(\cos\left(x-y^2\right)\right)}\end{array}\right]$$

11. $f(x,y,z) = x^{\frac{1}{x}}z.$ $\left[\frac{\partial f}{\partial x} = x^{\frac{1}{x}}z\left(-\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right), \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \frac{\partial f}{\partial z} = x^{\frac{1}{x}}\right]$

12. Nech $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2} + x - y & \text{ak} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{ak} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$

    Vypočítajme $\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}, \frac{\partial f(0,0)}{\partial y}.$ $\left[\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = 1, \frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = -1\right]$

13. Nech $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{ak} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{ak} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$. Zistite, či je f diferencovateľná v bode $(0,0)$?

    $\left[\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = 0 = \frac{\partial f(0,0)}{\partial y}\right.$ nie je spojitá v $(0,0)$, teda nie je diferencovateľná v $\left.(0,0).\right]$

14. Nech $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{ak} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{ak} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$. Zistite, či je f diferencovateľná v bode $(0,0)$? $\left[\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = 0 = \frac{\partial f(0,0)}{\partial y}\right.$ nie je spojitá v $(0,0)$, teda nie je diferencovateľná v

15. Nech $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{ak} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{ak} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$. Zistite, či je f diferencovateľná v bode $(0,0)$? $\left[\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = 0 = \frac{\partial f(0,0)}{\partial y}\right.$ nie je spojitá v $(0,0)$, teda nie je diferencovateľná v

16. Nech $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{ak} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{ak} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$. Zistite, či je f diferencovateľná v bode $(0,0)$? $\left[\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = 1 = \frac{\partial f(0,0)}{\partial y}\right.$ je spojitá v $(0,0)$, ale nie je diferencovateľná v $(0,0$

17. Nech $f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2 \sin \frac{1}{x^2+y^2} & \text{ak} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{ak} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$. Zistite, či je f diferencovateľná v bode $(0,0)$? $\left[\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = 0 = \frac{\partial f(0,0)}{\partial y}\right.$ je spojitá v $(0,0)$, je diferencovateľná v $($

18. Nech $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$. Zistite, či je f diferencovateľná v bode $(0,0)$? $\left[\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = 1 = \frac{\partial f(0,0)}{\partial y}\right.$ je spojitá v $(0,0)$, nie je diferencovateľná v $\left.(0,0)\,.\right]$

19. Nech $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Zistite, či je f diferencovateľná v bode $(0,0)$? $\left[\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}, \frac{\partial f(0,0)}{\partial y}\right.$ neexistujú, nie je diferencovateľná v $\left.(0,0)\,.\right]$

20. Nech $f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Zistite, či je f diferencovateľná v bode $(0,0,0)$? $\left[\frac{\partial f(0,0,0)}{\partial x}, \frac{\partial f(0,0,0)}{\partial y}, \frac{\partial f(0,0,0)}{\partial z}\right.$ neexistujú, nie je diferencovateľná v $\left.(0,0,0)\,.\right]$

21. Zistite, či je funkcia $f : \boldsymbol{R}^2 \longrightarrow \boldsymbol{R},\ f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} & (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ diferencovateľná v bode $(0,0)$.

    [nie je]

22. Zistite, či je funkcia $f : \boldsymbol{R}^2 \longrightarrow \boldsymbol{R},\ f(x,y) = \sqrt{|xy|}$ diferencovateľná v bode $(0,0)$.

    [nie je]

23. Daná je funkcia $f : \boldsymbol{R}^3 \longrightarrow \boldsymbol{R},\ f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{2x-3y+z^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$ .Vypočítajte

    (a) parciálne derivácie v bode $(0,0,0)$,

    (b) zistite, či je funkcia v bode $(0,0,0)$ diferencovateľná.

$\left[\frac{\partial f}{\partial x}(0,0,0) = \infty,\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0,0) = -\infty,\ \frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0)\right.$ neexistuje; nie je diferencovateľná$\left.\right]$

Vektor gradientu, vety o strednej hodnote.

Vektor gradientu.

Reálna funkcia $f : A\,(\subset \boldsymbol{R}^n) \longrightarrow \boldsymbol{R}$ často nazývame skalárne pole (skalárna funkcia), pretože každému bodu $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ priradí $\boldsymbol{x} \longmapsto f(\boldsymbol{x})$ skalár a funkcia $\boldsymbol{f} : A\,(\subset \boldsymbol{R}^n) \longrightarrow \boldsymbol{R}^m$ nazývame vektorové pole (vektorová funkcia), pretože jej hodnoty môžeme interpretovať ako vektor.

Nech $f : A\,(\subset \boldsymbol{R}^n) \longrightarrow \boldsymbol{R}$ je diferencovateľná. Derivácia funkcie f v bode $\boldsymbol{x}$, $Df_{\boldsymbol{x}}$ je lineárny operátor, teda ju môžeme stotožniť s maticou typu $1 \times n$ (prvkom $\boldsymbol{R}^n$) t.j. s vektorom (za vektor považujeme stĺpcovú maticu $n \times 1$). Tento vektor sa nazýva gradient f v bode $\boldsymbol{x}$ a označuje $gradf(\boldsymbol{x})$ alebo $\nabla f(\boldsymbol{x})$. Presnejšie $\nabla f(\boldsymbol{x})$ je definovaný ako prvok priestoru $\boldsymbol{R}^n$:

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{h} = D\, f_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{h}),\ \forall \boldsymbol{h} \in \boldsymbol{R}^n \tag{1}$$

Je prirodzené, že tu používame Euklidovský skalárny súčin, pretože sme identifikovali komponenty vektora $Df_{\boldsymbol{x}}$ ako matice typu $1 \times n$ s reprezentáciou lineárneho operátora na bázových prvkoch.

Jedno z použití gradientu skalárneho poľa je určenie smeru najväčšej zmeny rastu skalárneho poľa f.

Theorem 235 *Nech $f : G\,(\subset \boldsymbol{R}^n) \longrightarrow \boldsymbol{R}$ je diferencovateľná v bode $\boldsymbol{a} \in G$.Potom pre každý smer $\boldsymbol{e}$, $\frac{d\Phi}{d\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{a})$ existuje a platí*

$$\frac{df}{d\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{a}) = Df_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{e}) = \nabla f(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{e}. \tag{2}$$

Smerová derivácia $\frac{df}{d\mathbf{e}}(\boldsymbol{a})$ meria zmenu rastu funkcie f v smere $\mathbf{e}$. Ktorý smer $\mathbf{e}$ je teda smer, v ktorom má f najväčší rast? Z vlastností skalárneho súčinu dostávame odhad

$$|\nabla f(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{e}| \leq \|\nabla f(\boldsymbol{a})\|\, \|\boldsymbol{e}\|$$

rovnosť nastane iba ak $\mathbf{e}$ je skalárnym násobkom $\nabla f(\boldsymbol{a})$. Teda hodnota $\frac{df}{d\mathbf{e}}(\boldsymbol{a})$ má maximálnu hodnotu ak

$$\boldsymbol{e} = \frac{\nabla f(\boldsymbol{a})}{\|\nabla f(\boldsymbol{a})\|},$$

keď $\|\nabla f(\boldsymbol{a})\| \neq 0$.Tak smer najrýchlejšej zmeny rastu skalárneho poľa f v bode $\boldsymbol{a}$ je $\nabla f(\boldsymbol{a})$. Podobne smerom najrýchlejšej zmeny poklesu je $-\nabla f(\boldsymbol{a})$.

Iná interpretácia gradientu $\nabla f(\boldsymbol{a})$ vzniká ak skúmame jeho chovanie na ekvipotenciálnych hladinách funkcie f t.j. $S = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n;\ f(\boldsymbol{x}) = \alpha\}$, kde $\alpha = const.$

Ak $f : A\left(\subseteq \boldsymbol{R}^2\right) \longrightarrow \boldsymbol{R}$, potom graf j je plocha definovaná rovnicou $z = f(x,y)$, $G(f) = \{(\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x})) : \boldsymbol{x} \in A\}$. Ekvipotenciálne hladiny sú krivky, na ktorých je výška plochy konštantná (vrstevnice na mape). Ak si plochu predstavíme ako krajinu s horami a údoliami, potom základná rovina je mapa (v mierke $1:1$) a ekvipotenciálne krivky sú vrstevnice. Ak by sme sa chceli „po ploche f pohybovať" v smere čo najväčšieho rastu, treba sa pohybovať v smere kolmom na vrstevnice. Inými slovami ∇f je ortogonálne na vrstevnicu „ plochy f ". Vieme, že dva vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ sú ortogonálne, ak $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 0$. Pretože ∇f je ortogonálne na ekvipotenciálnu krivku (hladinu) funkcie f, čo znamená, že $\nabla f \cdot \boldsymbol{T} = 0,\ \forall \boldsymbol{T}$, kde $\boldsymbol{T}$ je dotykový vektor ku ekvipotenciálnej hladine. Definujeme *dotykový smer* ku ekvipotenciálnej ploche pomocou krivky, ktorá v tejto ploche leží. Krivkou budeme nazývať obraz spojitej funkcie $\boldsymbol{c} : \langle t_1, t_2 \rangle \, (\subset \boldsymbol{R}) \longrightarrow \boldsymbol{R}^n$, t.j. $\boldsymbol{c}(\langle t_1, t_2 \rangle)$ je krivka v $\boldsymbol{R}^n$.

Nech $S = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n;\ f(\boldsymbol{x}) = \alpha\}$ je ekvipotenciálna hladina funkcie f. Krivku v množine S definujme pomocou diferencovateľnej funkcie $\boldsymbol{c} : \langle t_1, t_2 \rangle \longrightarrow S$. Vektor $\boldsymbol{T}$ je dotykový vektor ku S v bode $\boldsymbol{z} \in S$, ak existuje krivka v S taká, že $\boldsymbol{c}(\tau) = \boldsymbol{z}$ pre nejaké $\tau \in \langle t_1, t_2 \rangle$ a platí $\frac{d\boldsymbol{c}(\tau)}{d\tau} = \boldsymbol{T}$. Pritom

$$\frac{d\boldsymbol{c}(\tau)}{d\tau} = \left(\frac{dc_1(\tau)}{d\tau}, \frac{dc_2(\tau)}{d\tau}, ..., \frac{dc_n(\tau)}{d\tau} \right) = D\boldsymbol{c}(\tau).$$

Skutočne $\boldsymbol{T}$ je dotykový vektor, pretože ak P je bod krivky, ktorého polohový vektor je $\boldsymbol{c}(t)$ a Q je bod krivky, ktorého polohový vektor je $\boldsymbol{c}(t+h)$. Potom vektor $\overline{PQ} = \boldsymbol{c}(t+h) - \boldsymbol{c}(t)$ má taký istý smer ako vektor $\frac{\boldsymbol{c}(t+h)-\boldsymbol{c}(t)}{h}$ pre $h > 0$ a aproximuje $\frac{d\boldsymbol{c}}{dt}$. Potom vektor $\lim_{h \to 0^+} \frac{\boldsymbol{c}(t+h)-\boldsymbol{c}(t)}{h} = \frac{d\boldsymbol{c}(t)}{dt}$ je dotykový vektor ku krivke v bode t.

Theorem 236 *Nech $f : A\,(\subset \boldsymbol{R}^n) \longrightarrow \boldsymbol{R}$ je diferencovateľná a pre $\alpha \in \boldsymbol{R}$ nech $S = \{\boldsymbol{x} \in A\,(\subseteq \boldsymbol{R}^n) :\ f(\boldsymbol{x}) = \alpha\}$ je ekvipotenciálna hladina funkcie f. Potom pre $\boldsymbol{z} \in S$ je $\nabla f(\boldsymbol{z})$ ortogonálne ku S.*

Vety o strednej hodnote.

Theorem 237 *(Veta o strednej hodnote) Nech $f : G\,(\subset \boldsymbol{R}^n) \longrightarrow \boldsymbol{R}$ je spojitá na úsečke $\{\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{h};\ 0 \le t \le 1\}$ a diferencovateľná v každom bode úsečky $M = \{\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{h};\ 0 < t < 1\}$. Potom existuje θ také, že $0 < \theta < 1$, pričom $f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a}) = Df_{\boldsymbol{a}+\theta\boldsymbol{h}}(\boldsymbol{h}) = \nabla f(\boldsymbol{a} + \theta\boldsymbol{h}) \cdot \boldsymbol{h}$.*

Definition 238 *Podmnožina $C \subset \boldsymbol{R}^n$ sa nazýva konvexná ak pre každé $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in C$ aj úsečka*

$$\{(1-t)\boldsymbol{x} + t\,\boldsymbol{y}; 0 \le t \le 1\}$$

leží v C.

Theorem 239 *Nech $C \subset \boldsymbol{R}^n$ je uzavretá konvexná podmnožina s neprázdnym vnútrom a nech $f : C \longrightarrow \boldsymbol{R}$ je spojitá na C a diferencovateľná na $int(C)$. Predpokladajme, že $\|Df_{\boldsymbol{x}}\| \le M, \forall \boldsymbol{x} \in int(C)$. Potom*

$$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in C;\ \ |f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})| \ \le M \, \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|.$$

Ak napríklad $Df_{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{0}, \forall \boldsymbol{x} \in int(C)$, potom $f = const$ na C.

Parciálne derivácie vyšších rádov.

Ak parciálne derivácie funkcie $f : G\,(\subset \boldsymbol{R}^n) \longrightarrow \boldsymbol{R}$ existujú na G, potom funkcie

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : G \longrightarrow \boldsymbol{R},\ i = 1, 2, ..., n$$

môžu mať tiež parciálne derivácie. Tieto derivácie nazývame parciálne derivácie druhého rádu funkcie f a píšeme

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \quad \text{alebo} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \quad \text{alebo} \quad D_j D_i f. \text{Ak} \quad i = j, \text{ píšeme } \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

Ak v tomto procese môžeme pokračovať a dostaneme parciálne derivácie tretieho, štvrtého, ... rádu.

Example 240 *Nech* $f(x, y) = xy^2 + ye^x$. *Určte* $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

Solution 241 $\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 + ye^x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy + e^x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = ye^x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2y + e^x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2y + e^x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x.\square$

Všimnime si, že zmiešané parciálne derivácie $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ sú v tomto príklade rovnaké.

Example 242 *Nech*

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & ak \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & ak \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Potom $f \in C^1(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$ *ale* $\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y \partial x} \neq \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y}$.

Solution 243

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (3x^2 y - y^3)(x^2 + y^2)^{-1} - 2x^2 y(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)^{-2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = (x^3 - 3xy^2)(x^2 + y^2)^{-1} - 2xy^2(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)^{-2}$$

pre $(x, y) \neq (0, 0)$. *V bode* $(0, 0)$ *musíme parciálne derivácie počítať z definície.*

$$\frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0, \quad t.j. \quad \frac{\partial f\,(0, 0)}{\partial x} = 0, \; \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = 0, \quad t.j. \quad \frac{\partial f\,(0, 0)}{\partial y} = 0.$$

Pre parciálne derivácie prvého rádu dostaneme nasledujúce odhady:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \leq \frac{|y|\left(3|x|^2 + |y|^2\right)}{x^2 + y^2} + \frac{2|x|^2|y|\left(|x|^2 + |y|^2\right)}{(x^2 + y^2)^2}$$

odkiaľ vidíme, že

$$\frac{\partial f}{\partial x} \longrightarrow 0 \quad ak \quad (x, y) \;\longrightarrow\; (0, 0),$$

čo ukazuje, že $\frac{\partial f}{\partial x}$ *je spojitá funkcia v bode* $(0, 0)$.*Podobne pre* $\frac{\partial f}{\partial y}$. *Spojitosť* $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ *v bodoch* $(x, y) \neq (0, 0)$ *ihneď vidieť. Pre* $(x, y) \neq (0, 0)$ *máme*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{(3x^2 - 3y^2)}{(x^2 + y^2)} + \frac{2y^4 - 12x^2y^2 - 2x^4}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{8x^2y^2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^3}.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{(3x^2 - 3y^2)}{(x^2 + y^2)} + \frac{2y^4 - 12x^2y^2 - 2x^4}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{8x^2y^2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^3}.$$

ako vidíme, tieto výrazy sa rovnajú. Avšak v bode $(0,0)$ *máme*

$$\frac{\partial^2 f\,(0,0)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right) = \lim_{k \longrightarrow 0} \frac{\left[\frac{\partial f(0,k)}{\partial x} - \frac{\partial f(0,0)}{\partial x}\right]}{k} = \lim_{k \longrightarrow 0} \frac{-k - 0}{k} = -1.$$

ale

$$\frac{\partial^2 f\,(0,0)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{\left[\frac{\partial f(h,0)}{\partial x} - \frac{\partial f(0,0)}{\partial x}\right]}{h} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{h - 0}{h} = 1.\square$$

Remark 244 *V poslednom príklade sme ukázali, že zmiešané parciálne derivácie druhého rádu pri rôznom poradí derivovania sú rôzne. Tento príklad je výnimočný prípad.*

Remark 245 *Pre funkciu* $f : G\,(\subset \boldsymbol{R}^n) \longrightarrow \boldsymbol{R}$, $G-$ *otvorená, budeme písať* $f \in C^2(G)$, *ak všetky parciálne derivácie druhého rádu funkcie* f *sú spojité na množine* G *a hovoriť, že* f *je funkcia triedy* C^2 *na* G. *Poznamenajme, že ak* $f \in C^2(G) \Longrightarrow f \in C^1(G)$, *pretože ak* $f \in C^2(G)$, *tak* $\forall\, i = 1, \ldots, n$, *teda* $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ *sú diferencovateľné, čo implikuje, že sú spojité t.j.* $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in C^1(G)$.

Theorem 246 *Nech* $f : G\,(\subset \boldsymbol{R}^n) \longrightarrow \boldsymbol{R}$, $f \in C^2(G)$.*Potom pre každé* $\boldsymbol{a} \in G$ *a pre každé* i, j; $1 \leq i, j \leq n$ *platí*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\boldsymbol{a}).$$

Platí aj zoslabené tvrdenie, ktoré kvôli jednoduchosti uvedieme iba pre prípad $n = 2$.

Theorem 247 *Nech* $f : G\left(\subset \boldsymbol{R}^2\right) \longrightarrow \boldsymbol{R}$ *a nech* $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ *a* $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ *existujú a sú spojité na otvorenej množine* G *obsahujúcej bod* $\boldsymbol{a}$. *Potom* $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ *existuje (v bode* $\boldsymbol{a}$*) a platí*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\boldsymbol{a}).$$

Cvičenia.

1. Zistite, či je funkcia $f : \boldsymbol{R}^2 \longrightarrow \boldsymbol{R},\ f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} & (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ diferencovateľná v bode $(0,0)$.

   [nie je]

2. Zistite, či je funkcia $f : \boldsymbol{R}^2 \longrightarrow \boldsymbol{R},\ f(x,y) = \sqrt{|xy|}$ diferencovateľná v bode $(0,0)$.

   [nie je]

3. Daná je funkcia $f : \boldsymbol{R}^3 \longrightarrow \boldsymbol{R},\ f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{2x-3y+z^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$ .Vypočítajte

   (a) parciálne derivácie v bode $(0,0,0)$,

   (b) zistite, či je funkcia v bode $(0,0,0)$ diferencovateľná.

   (c) $\left[\frac{\partial f}{\partial x}(0,0,0) = \infty,\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0,0) = -\infty,\ \frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0) \text{ neexistuje; nie je diferencovateľná}\right]$

4. Pomocou definície vypočítajte parciálne derivácie funkcie $f(x,y) = (x^2+y)\sin(x+y)$ v bode $\boldsymbol{a} = (0,\pi)$.

   $\left[\frac{\partial f}{\partial x}(0,\pi) = -\pi,\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,\pi) = -\pi\right]$

5. Pomocou definície vypočítajte parciálne derivácie funkcie $f(x,y) = 4x^3 - 2y^2 + 3xy^2 + 5y$ v bode $\boldsymbol{a} = (1,2)$.

   $\left[\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 24,\ \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = 9\right]$

6. Pomocou definície vypočítajte parciálne derivácie funkcie

   $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ v bode $\boldsymbol{a} = (0,0)$.

   $\left[\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0,\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0\right]$

7. Vypočítajte $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ a $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}$ keď $f(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

   $\left[\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{2x^4+6x^2y^2}{(x^2+y^2)^2},\ \frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = 2,\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = \frac{4x^4y-12x^2y^3}{(x^2+y^2)^3},\ \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y \partial x} - \text{neexistuje}\right]$

8. Nech $f : \boldsymbol{R}^2 \longrightarrow \boldsymbol{R},\ f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$. Vypočítajte $\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y \partial x},\ \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y}$.

   $\left[\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y \partial x} = 0,\ \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y} = 0\right]$

9. Vypočítajte maticu diferenciálu funkcie $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f}$ ak $\boldsymbol{g}(u,v) = \left(uv, \frac{u}{v}, 1\right)$ a $\boldsymbol{f}(x,y) = (\ln x, \cos y)$.

$$\left[\begin{array}{c} D\boldsymbol{h}(x,y) = D\boldsymbol{g}(f(x,y)) \cdot D\boldsymbol{f}(x,y) = \\ = \begin{pmatrix} \cos y & \ln x \\ \frac{1}{\cos y} & -\frac{\ln x}{\cos^2 y} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & 0 \\ 0 & -\sin y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\cos y}{x} & -\ln x \sin y \\ \frac{1}{x \cos y} & \frac{\ln x \sin y}{\cos^2 y} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}\right]$$

10. Vypočítajte parciálne derivácie a gradient funkcie $f(x,y) = \frac{2}{(3x^2+4y^2)^2}$ v bode $\boldsymbol{a} = (-1,1)$. $\left[\frac{\partial f}{\partial x}(-1,1) = \frac{24}{343}, \frac{\partial f}{\partial y}(-1,1) = -\frac{32}{343}, \mathit{grad}\, f(-1,1) = \left(\frac{24}{343}, -\frac{32}{343}\right),\right]$

11. Vypočítajte $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ a $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}$ keď $f(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

$\left[\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{2x^4+6x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}, \frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = 2, \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = \frac{4x^4y-12x^2y^3}{(x^2+y^2)^3}, \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y \partial x} - \text{neexistuje}\right]$

12. Nech $f : \boldsymbol{R}^2 \longrightarrow \boldsymbol{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2) \sin \frac{1}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$. Vypočítajte $\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y}$.

$\left[\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y \partial x} = 0, \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y} = 0\right]$

13. Vypočítajte deriváciu funkcie $f(x,y) = e^y \cos(x+y)$ v bode $\boldsymbol{a} = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ v smere vektora $\boldsymbol{e} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

$\left[\frac{df}{d\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{a}) = f_{.\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{a}) = -\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{3}\right)\right]$

14. Nájdite deriváciu funkcie $f(x,y) = 3x^2 - 6xy + y^2$ v bode $\boldsymbol{a} = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right)$ v smere ľubovoľného jednotkového vektora $\boldsymbol{e}$. Zistite v akom smere je derivácia

   (a) nulová, $\left[\boldsymbol{e}_1 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \boldsymbol{e}_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$

   (b) najväčšia, $\left[\boldsymbol{e}_3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$

   (c) najmenšia. $\left[\boldsymbol{e}_4 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$

15. Nájdite deriváciu funkcie $f(x,y,z) = 3x^3 - 4y^3 + 2z^4$ v bode $\mathbf{a} = (2,2,1)$ v smere jednotkového vektora $\mathbf{e}$, ktorý je určený bodmi $A = (2,2,1)$, $B = (5,4,6)$. $\left[f_{\mathbf{e}}(\mathbf{a}) = \frac{52}{\sqrt{38}}\right]$

16. Nech $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}$, $f(x,y,z) = xy^2 + z^3 - xyz$. Nájdite deriváciu funkcie f v bode $\mathbf{a} = (1,1,2)$ v smere vektora $\mathbf{e}$, ktorý zviera so súradnicovmi osami uhly $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\beta = \frac{\pi}{4}$, $\gamma = ?$ $[f_{\mathbf{e}}(\mathbf{a}) = 5]$

17. Nájdite smer, v ktorom je smerová derivácia funkcie $f(x,y) = 3x^4 + 7y^2 - 4x^2y$, v bode $\mathbf{a} = (1,0)$ maximálna a jej hodnotu.

$\left[\mathbf{e} = \left(\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right), f_{\mathbf{e}}(\mathbf{a}) = 4\sqrt{10}\right]$

18. Nájdite smer, v ktorom je smerová derivácia funkcie $f(x,y) = \ln \frac{x+y}{x-y}$, v bode $\mathbf{a} = (3,0)$ maximálna a jej hodnotu.

    $\left[\mathbf{e} = (0,1)\,,\ f_{\mathbf{e}}(\mathbf{a}) = \frac{2}{3}\right]$

19. Nájdite deriváciu funkcie $f(x,y) = 3x^2 - 6xy + y^2$ v bode $\mathbf{a} = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right)$ v smere ľubovoľného jednotkového vektora $\mathbf{e}$. Zistite v akom smere je derivácia

    (a) nulová, $\left[\mathbf{e}_1 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \ \mathbf{e}_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$

    (b) najväčšia, $\left[\mathbf{e}_3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$

    (c) najmenšia. $\left[\mathbf{e}_4 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$

Extrémy.

Lokálne extrémy a stacionárne body.

V tejto kapitole sa budeme zaoberať iba skalárnymi poľami, t.j. ak $\emptyset \neq A \subseteq \boldsymbol{R}^n$ budeme sa zaoberať funkciami $f : A\,(\subset \boldsymbol{R}^n) \longrightarrow \boldsymbol{R}$. Pretože prvkami oboru hodnôt $f(A)$ sú body z $\boldsymbol{R}$, kde je možné zaviesť obvyklé usporiadanie, preto má zmysel hovoriť o najväčšej aj najmenšej hodnote. Samozrejme, že nemusí existovať ani najväčšia ani najmenšia hodnota.

Definition 248 *Funkcia $f : G\,(\subset \boldsymbol{R}^n) \longrightarrow \boldsymbol{R}$ nadobúda na množine $A \subset G$ maximum (minimum) v bode $\boldsymbol{a} \in A$,ak*

$$f(\boldsymbol{x}) \leq f(\boldsymbol{a}) \ \ (f(\boldsymbol{x}) \geq f(\boldsymbol{a}))\,, \forall \boldsymbol{x} \in A,$$

čo zapisujeme

$$\max_{\boldsymbol{x}\in A} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}),\ (\min_{\boldsymbol{x}\in A} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a})).$$

Definition 249 *Hovoríme, že $f : G\,(\subset \boldsymbol{R}^n) \longrightarrow \boldsymbol{R}$ má lokálne maximum (minimum) v bode $\boldsymbol{a} \in G$,ak existuje $O_\delta\,(\boldsymbol{a}) \subset G$ také, že*

$$f(\boldsymbol{x}) \leq f(\boldsymbol{a}) \ \ (f(\boldsymbol{x}) \geq f(\boldsymbol{a}))\,, \forall \boldsymbol{x} \in O_\delta\,(\boldsymbol{a})\,,$$

čo zapisujeme

$$\max_{\boldsymbol{x}\in O_\delta(\boldsymbol{a})} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}),\ (\min_{\boldsymbol{x}\in O_\delta(\boldsymbol{a})} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a})).$$

Maximá a minimá, lokálne maximá a minimá nazývame extrémy funkcie f.

Pripomeňme vetu 200: ak $K \subset \boldsymbol{R}^n$ je kompaktná a $f : K \longrightarrow \boldsymbol{R}$ je spojitá, potom f nadobúda na K maximum aj minimum. Táto veta však nedáva postup ako nájsť extrémy.

Theorem 250 *Nech $f : G\,(\subset \boldsymbol{R}^n) \longrightarrow \boldsymbol{R}$ je diferencovateľná na otvorenej množine G a nech $A \subset G$. Ak f nadobúda maximum (minmum) na A vo vnútornom bode $\boldsymbol{a} \in int\,(A)$, potom $Df_{\boldsymbol{a}} = \nabla f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$.*

Definition 251 *Nech $f : G\,(\subset \boldsymbol{R}^n) \longrightarrow \boldsymbol{R}$ je diferencovateľná v bode $\boldsymbol{a} \in G$. Bod $\boldsymbol{a}$ sa nazýva stacionárny bod funkcie f ak $\nabla f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$.*

Theorem 252 *Nech $f : G\,(\subset \boldsymbol{R}^n) \longrightarrow \boldsymbol{R}$ je diferencovateľná na otvorenej množine G a nech $A \subset G$.Ak f nadobúda maximum (alebo minimum) na A v bode $\boldsymbol{a} \in A$, potom buď $\boldsymbol{a}$ je stacionárny bod, alebo $\boldsymbol{a} \in \partial A$.*

Nájdenie stacionárnych bodov je rutinná záležitosť. Vypočítame všetky parciálne derivácie funkcie f a položíme ich (naraz) rovné nule. Potom je to čisto algebrická úloha. Avšak nie všetky stacionárne body sú nutne extrémami.

Example 253 *Funkcia $f : \langle -1, 1\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}$, $f\,(x) = x^3$ má v bode $x = 0$ stacionárny bod, ale nie je to extrém funkcie f.*

Solution 254 *Máme:* $f'(0) = 0$, *teda bod* $x = 0$ *je stacionárny bod funkcie* f, *ale v tomto bode nie je extrém funkcie* f.

Pre funkciu dvoch premenných jej graf $z = f(x, y)$ je plochou v $\boldsymbol{R}^3$, ktorú si môžeme predstavovať ako terén. Maximá sú vrcholky hôr, minimá sú dná údolí. Môžme tam nájsť aj horské priesmyky - body, v ktorých je gradient nulový, ale vzhľadom k okolitým vrcholom sú bodmi minima, vzhľadom k okolitým údoliam sú zas bodmi maxima. Také body so svojim okolím pripomínajú konské sedlo. Ak uvažujeme funkciu viac ako dvoch premenných je možné aj iné chovanie takýchto bodov. Stacionárne body funkcie, ktoré nie sú ani jej (lokálnymi) maximami ani minimami budeme nazývať sedlové body.

Theorem 255 *Lokálne extrémy diferencovateľnej funkcie sa vždy nachádzajú v stacionárnych bodoch.*

Opačné tvrdenie k predchádzajúcej vete je nepravdivé. Okrem toho nemusí existovať žiadny lokálny extrém na uzavretej ohraničenej množine A, aj keď globálne extrémy existujú.

Example 256 *Nech* $f : \boldsymbol{R}^2 \longrightarrow \boldsymbol{R}, f(x, y) = x + y$, *kde* $A = \{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$. *Funkcia* f *nemá na množine* A *lokálny extrém, ale má minimum aj maximum.*

Solution 257 *Ľahko sa možno presvedčiť o tom, že*

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2} = \max_{(x,y)\in A} f(x, y)$$

a

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\sqrt{2} = \min_{(x,y)\in A} f(x, y).$$

Oba body $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \in \partial A$. *Funkcia nemá lokálne extrémy.*

□

Hľadanie všetkých stacionárnych bodov nám dá úplný zoznam všetkých kandidátov na lokálne extrémy diferencovateľnej funkcie.

Example 258 *Nech* $f : \boldsymbol{R}^2 \longrightarrow \boldsymbol{R}$, $f(x, y) = x^2 - y^2$. *Potom* $(0, 0)$ *je jediný stacionárny bod, ale nie je to ani minimum ani maximum.*

Solution 259 *Máme* $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y$, *t.j.* $\nabla f(x, y) = \mathbf{0} \Longrightarrow x = 0, y = 0$, *teda* $(0, 0)$ *je stacionárny bod. Platí:* $f(0, 0) = 0$, *ale* $f(x, 0) = x^2 > 0$, *zatiaľ čo* $f(0, y) = -y^2$. *Tak bod* $(0, 0)$ *je sedlový bod. Skutočne plocha* $z = x^2 - y^2$ *najlepšie pripomína sedlo.*

□

Taylorova veta.

V úvode zopakujeme Taylorovu vetu, ktorú sme uviedli v kurze Matematická analýza I.

Theorem 260 *(Taylorova veta) Nech $f : (\alpha, \beta) \longrightarrow \boldsymbol{R}$ je $(p-1)$-krát diferencovateľná na (α, β) a predpokladajme, že derivácie $f, f\,', f\,'', ..., f^{(p-1)}$ sú spojité na $\langle a, b\rangle \subset (\alpha, \beta)$. Potom ak $f^{(p)}$ existuje na intervale (a, b), existuje bod $\xi \in (a, b)$ taký, že*

$$f(b) = f(a) + f\,'(a)(b-a) + \frac{f\,''(a)}{2!}(b-a)^2 + ... + \frac{f^{\,(p-1)}(a)}{(p-1)!}(b-a)^{p-1} + E_p,$$

kde

$$E_p = \frac{f^{\,(p)}(\xi)}{p!}(b-a)^p.$$

Využijeme Taylorovu vetu pre funkciu jednej reálnej premennej, aby sme dokázali jej n-dimenzionálnu verziu. Pripomeňme, že $f \in C^p(G)$ znamená, že f má spojité parciálne derivácie rádu p na G.

Theorem 261 *Nech $G \subseteq \boldsymbol{R}^n$ je otvorená množina a nech $f \in C^p(G)$. Nech $\boldsymbol{a} \in G$ a nech $\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{h} \in G$ pre všetky $t \in \langle 0, 1\rangle$. Potom existuje $\Theta; 0 < \Theta < 1$, že platí*

$$f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{a}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_i} h_i + \frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_j \partial x_i} h_i h_j + \cdots +$$

$$+ \frac{1}{(p-1)!} \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{p-1}}^{n} \frac{\partial^{(p-1)} f(\boldsymbol{a})}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_{p-1}}} h_{i_1} h_{i_2} \ldots h_{i_{p-1}} + E_p(\boldsymbol{h}),$$

kde

$$E_p = \frac{1}{p!} \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_p = 1}^{n} \frac{\partial^{(p)} f(\boldsymbol{a} + \Theta \boldsymbol{h})}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_p}}$$

je Lagrangeov tvar zvyšku.

Remark 262 *Zápis Taylorovej vety pomocou multiindexov je prirodzeným spôsobom odvodený v jej dôkaze.*

Example 263 *Nájdite Taylorov rozvoj funkcie $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3$ v bode $(1, 1, 1)$.*

Solution 264 *Dostávame*

$$f(1+h_1, 1+h_2, 1+h_3) = f(1,1,1) + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f(1,1,1)}{\partial x_i} h_i + \frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial^2 f(1,1,1)}{\partial x_j \partial x_i} h_i h_j + \cdots +$$

$$+\frac{1}{(p-1)!}\sum_{i_1,i_2,\dots,i_{p-1}}^{3}\frac{\partial^{(p-1)}f(1,1,1)}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\dots\partial x_{i_{p-1}}}h_{i_1}h_{i_2}\dots h_{i_{p-1}}+E_p(\boldsymbol{h})=$$

$$=f(1,1,1)+\frac{\partial f\left(1,1,1\right)}{\partial x_1}h_1+\frac{\partial f\left(1,1,1\right)}{\partial x_2}h_2+\frac{\partial f\left(1,1,1\right)}{\partial x_3}h_3+$$

$$+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f\left(1,1,1\right)}{\partial x_1^2}h_1^2+\frac{\partial^2 f\left(1,1,1\right)}{\partial x_2^2}h_2^2+\frac{\partial^2 f\left(1,1,1\right)}{\partial x_3^2}h_3^2+\right.$$

$$\left.+2\frac{\partial^2 f\left(1,1,1\right)}{\partial x_1\partial x_2}h_1h_2+2\frac{\partial^2 f\left(1,1,1\right)}{\partial x_1\partial x_3}h_1h_3+2\frac{\partial^2 f\left(1,1,1\right)}{\partial x_2\partial x_3}h_2h_3\right)+E_3.$$

Máme:

$$f(1,1,1)=1,\ \frac{\partial f\left(1,1,1\right)}{\partial x_1}=1,\ \frac{\partial f\left(1,1,1\right)}{\partial x_2}=1,\ \frac{\partial f\left(1,1,1\right)}{\partial x_3}=1,$$

$$\frac{\partial^2 f\left(1,1,1\right)}{\partial x_1^2}=0,\ \frac{\partial^2 f\left(1,1,1\right)}{\partial x_2^2}=0,\ \frac{\partial^2 f\left(1,1,1\right)}{\partial x_3^2}=0,$$

$$\frac{\partial^2 f\left(1,1,1\right)}{\partial x_1\partial x_2}=1,\ \frac{\partial^2 f\left(1,1,1\right)}{\partial x_1\partial x_3}=1,\ \frac{\partial^2 f\left(1,1,1\right)}{\partial x_2\partial x_3}=1,\frac{\partial^3 f\left(1,1,1\right)}{\partial x_1\partial x_2\partial x_3}=1.$$

Tak teda

$$(1+h_1)(1+h_2)(1+h_3)=1+h_1+h_2+h_3+h_1h_2+h_1h_3+h_2h_3+E_3$$

V tomto prípade jednoduchým spôsobom dostávame, že $E_3=h_1h_2h_3$. *Ale Taylorov vzorec nám dáva*

$$E_3=\frac{1}{3!}\sum_{i,j,k=1}^{3}\frac{\partial^3 f}{\partial x_i\partial x_j\partial x_k}(1+\Theta h_1,1+\Theta h_2,1+\Theta h_3)h_ih_jh_k,$$

čo vyzerá komplikovane, ale treba si uvedomiť, že $\frac{\partial^3 f}{\partial x_i\partial x_j\partial x_k}=0$ *s výnimkou prípadu, keď sú* i,j,k *navzájom rôzne a vtedy je* $\frac{\partial^3 f}{\partial x_1\partial x_2\partial x_3}=1$. *Pretože* $\partial x_1\partial x_2\partial x_3$ *sa v tejto sume permutuje šesť krát tak aj v tomto prípade dostávame* $E_3=h_1h_2h_3$. *Pretože funkcia* f *je polynóm tretieho stupňa, potom* $E_4=0$. *Teda nakoniec dostávame*

$$(1+h_1)(1+h_2)(1+h_3)=1+h_1+h_2+h_3+h_1h_2+h_1h_3+h_2h_3+h_1h_2h_3.\square$$

Theorem 265 *(Taylorova veta s limitným tvarom zvyšku) Nech* $G\subseteq\boldsymbol{R}^n$ *je otvorená množina a nech* $f\in C^p\left(G\right)$. *Nech* $\boldsymbol{a}\in G$ *a nech* $\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{h}\in G$ *pre všetky* $t\in\langle 0,1\rangle$. *Potom*

$$f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})=f(\boldsymbol{a})+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f\left(\boldsymbol{a}\right)}{\partial x_i}h_i+\frac{1}{2!}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f\left(\boldsymbol{a}\right)}{\partial x_j\partial x_i}h_ih_j+\dots+$$

$$+\frac{1}{p!}\sum_{i_1,i_2,\dots,i_p=1}^{n}\frac{\partial^p f(\boldsymbol{a})}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\dots\partial x_{i_p}}+\omega_p(\boldsymbol{h}),$$

pričom

$$\lim_{\boldsymbol{h}\longrightarrow\boldsymbol{0}}\frac{\omega_p\left(\boldsymbol{h}\right)}{\left\|\boldsymbol{h}\right\|^p}=0.$$

Výraz

$$\sum_{i_1,i_2,\ldots,i_k=1}^{n} \frac{\partial^p f(\boldsymbol{a})}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\ldots\partial x_{i_k}} h_{i_1}h_{i_2}\ldots h_{i_k}$$

v Taylorovej vete sa nazýva diferenciál k-teho rádu funkcie f v bode $\boldsymbol{a}$ označujeme ho $D^k f_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{h})$ a symbolicky ho možno zapísať v tvare

$$D^k f_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{h}) = \left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^k f(\boldsymbol{a}).$$

Použitím tohto zápisu možno Taylorovu vetu preformulovať pomocou diferenciálov, čo si pozorný čitateľ isto preverí. Tak ako pre funkcie jednej premennej pri skúmaní povahy extrémov sa budeme zaujímať o výrazy druhého rádu. Potom v stacionárnom bode $\boldsymbol{a}$, máme $Df_{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{0}$ a Taylorov rozvoj funkcie f v bode $\boldsymbol{a}$ má tvar

$$f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{a}) + \frac{1}{2!}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_j \partial x_i} h_i h_j + \omega_2(\boldsymbol{h}),$$

kde

$$\lim_{\boldsymbol{h}\longrightarrow\boldsymbol{0}} \frac{\omega_2(\boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|^2} = 0$$

ak $f \in C^2$. Maticu druhých derivácií

$$H = \left[\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_j \partial x_i}\right]_{i,j=1}^{n}$$

nazývame Hessián funkcie f v bode $\boldsymbol{a}$ a označujeme ho H alebo $H_{f(\boldsymbol{a})}$. Druhý diferenciál funkcie f v bode $\boldsymbol{a}$, t.j.

$$D^2 f_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{h}) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_j \partial x_i} h_i h_j$$

sa nazýva kvadratická forma premenných $h_1, h_2, \ldots, h_n$ a dá sa napísať ako maticový súčin

$$\boldsymbol{h}^T H \boldsymbol{h},$$

kde $\boldsymbol{h}$ označuje stĺpcový vektor s komponentami $(h_1, h_2, \ldots, h_n)^T$ a $\boldsymbol{h}^T$ je odpovedajúci transponovaný riadkový vektor. Všimnime si, že pretože $f \in C^2$, platí $H = H^T$. Teória kvadratických foriem je algebrická záležitosť. Pripomenieme si niektoré definície:

Definition 266 *Kvadratická forma* $q : \boldsymbol{R}^n \longrightarrow \boldsymbol{R}$, $q(\boldsymbol{h}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} h_i h_j$, *kde* $a_{ij} = a_{ji}$ *sa nazýva kladne (záporne) definitná, ak*

$$q(\boldsymbol{h}) > 0 \; (q(\boldsymbol{h}) < 0) \, \forall \boldsymbol{h} \neq \boldsymbol{0},$$

kladne (záporne) semidefinitná, ak

$$q(\boldsymbol{h}) \geq 0 \; (q(\boldsymbol{h}) \leq 0) \, \forall \boldsymbol{h} \neq \boldsymbol{0},$$

indefinitná, ak existujú

$$\boldsymbol{h}_1, \, \boldsymbol{h}_2 \;\; \textit{také, že} \;\; q(\boldsymbol{h}_1) > 0 \;\; \textit{a} \;\; q(\boldsymbol{h}_2) < 0.$$

Kritériá, podľa ktorých vieme zistiť, či je daná kvadratická forma kladne (záporne) definitná sú predmetom štúdia algebry, zahŕňajú vlastnosti determinantov a subdeterminantov matice $A = (a_{ij})$. Existuje aj kritérium, ktoré určuje definitnosť kvadratickej formy pomocou vlastných hodnôt matice A. Pretože vlastné hodnoty reálnej symetrickej matice sú reálne, kritérium hovorí, že forma q je kladne definitná vtedy a len vtedy ak jej vlastné hodnoty sú kladné.

Ale v praktických výpočtoch a najmä pre funkcie dvoch alebo troch premenných je najľahšie zistiť, či je kvadratická forma kladne alebo záporne definitná alebo indefinitná doplnením na úplný štvorec. Napríklad pre dve premenné x, y kvadratická forma bude mať tvar $a_{11}h_1^2 + 2a_{12}h_1h_2 + a_{22}h_2^2$, čo sa dá písať v tvare

$$a_{11}\left(h_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}h_2\right)^2 + \left(a_{22} - \frac{a_{12}^2}{a_{11}}\right)h_2^2,$$

teda je kladne definitná vtedy a len vtedy ak $(a_{11} > 0) \wedge \left(a_{22} - \frac{a_{12}^2}{a_{11}} > 0\right)$.

Theorem 267 *Nech* $q(\boldsymbol{h}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}h_ih_j$ *je kladne definitná kvadratická forma. Potom existuje* $m > 0$ *také, že* $q(\boldsymbol{h}) \geq m\left\|\boldsymbol{h}\right\|^2$ *pre všetky* $\boldsymbol{h} = (h_1, \ldots, h_n)^T \in \boldsymbol{R}^n$.

Nutná a postačujúca podmienka existencie extrému.

V tejto časti budeme formulovať vety, na základe, ktorých dokážeme určiť druh extrému reálnej funkcie viacerých premenných.

Theorem 268 *(Nutná a postačujúca podmienka existencie lokálneho extrému) Nech* $G \subseteq \boldsymbol{R}^n$ *je otvorená a nech* $f \in C^2(G)$. *Nech* $\boldsymbol{a} \in G$ *je stacionárny bod funkcie* $f : G \longrightarrow \mathbf{R}$ *a nech* $D^2 f_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{h})$ *je kvadratická forma (druhý diferenciál funkcie* f *v bode* $\boldsymbol{x}$*)*

$$D^2 f_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{h}) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j.$$

Potom ak

a) $D^2 f_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{h})$ *je kladne definitná, funkcia* f *má v bode* $\boldsymbol{a}$ *ostré lokálne minimum* $\min f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a})$,

b) $D^2 f_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{h})$ *je záporne definitná, funkcia* f *má v bode* $\boldsymbol{a}$ *ostré lokálne maximum* $\max f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a})$,

c) $D^2 f_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{h})$ *je indefinitná, bod* $\boldsymbol{a}$ *je sedlový bod.*

Opačne:

a') Ak je v bode $\boldsymbol{a}$ *ostré lokálne minimum funkcie* f*, tak kvadratická forma* $D^2 f_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{h})$ *je kladne semidefinitná,*

b') Ak je v bode $\boldsymbol{a}$ *je ostré lokálne maximum funkcie* f*, tak* $D^2 f_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{h})$ *je záporne semidefinitná.*

Časti a) - c) vety sú postačujúce podmienky pre to, aby stacionárny bod bol minimom, maximom alebo sedlovým bodom, zatiaľ čo a'), b') sú nutné podmienky.

Predchádzajúca veta hovorí o tom, že stacionárny bod je extrémom funkcie v prípade, že determinant hessiánu je nenulový. Ak $detH = 0$ v bode $\boldsymbol{a}$, potom hovoríme o degenerovanom stacionárnom bode a vtedy určenie druhu extrému závisí od diferenciálov vyšších rádov (my sa však s takým prípadom v našom kurze nebudeme zaoberať). V nasledujúcom príklade ukážeme ako sa dá určiť druh extrému aj v prípade degenerovaného stacionárneho bodu.

Example 269 *Nájdime stacionárne body a určte ich druh pre funkciu*

$$f : \boldsymbol{R}^2 \longrightarrow \boldsymbol{R},\ f(x,y) = x^4 + y^4 + 6x^2y^2 + 8x^3.$$

Solution 270 *Máme*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 + 12xy^2 + 24x^2,\ \frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 + 12x^2y = 4y(y^2 + 3x^2).$$

Stacionárne body sú $(0,0)$, $(-6,0)$. *Hessián bude*

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x^2 + 12y^2 + 48x & 24xy \\ 24xy & 12y^2 + 12x^2 \end{pmatrix}.$$

V bode $(-6,0)$ *je*

$$H(-6,0) = \begin{pmatrix} 144 & 0 \\ 0 & 432 \end{pmatrix}$$

a kvadratická forma je

$$Q(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h}) = Q((-6,0),(h,k)) = (h_1,h_2)\begin{pmatrix} 144 & 0 \\ 0 & 432 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 144h_1^2 + 432h_2^2 > 0$$

t.j. v bode $(-6,0)$ *je lokálne minimum* $\min f(\boldsymbol{x}) = f(-6,0) = (-6)^4 + 8(-6)^3 = 2(-6)^3 = -432$. *V bode* $(0,0)$ *je*

$$H(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

teda $(0,0)$ *je degenerovaný stacionárny bod a určenie lokálneho extrému pomocou druhého diferenciálu nie je možné. V tomto prípade však možno ľahko overiť, že*

$$f(h,k) - f(0,0) = h^4 + k^4 + 6h^2k^2 + 8h^3 = (h^2 + k^2)^2 + 4h^2k^2 + 8h^3$$

odkiaľ vidieť, že ak $h = 0$ *a* k *je ľubovoľné, tak rozdiel je kladný a pre* $(-h,0)$ *je rozdiel záporný, t.j.* $(0,0)$ *je sedlový bod (funkcia nemá extrém).* □

Ak máme funkciu dvoch premenných $f(x,y)$ potom hessián v bode $\boldsymbol{a}$ a druhý diferenciál v bode $\boldsymbol{a}$ v smere $\boldsymbol{h} = (h,k)^T$ sú definované:

$$H(\boldsymbol{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial y^2} \end{pmatrix},\ D^2 f_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{h}) = \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x^2}h^2 + 2\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial y \partial x}hk + \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial y^2}k^2$$

a my dostávame tvrdenia ekvivalentné s predchádzajúcou vetou.

Theorem 271 *Nech* $\det H(\boldsymbol{a}) \neq 0$. *Druhý diferenciál funkcie* $f : G\left(\subset \boldsymbol{R}^2\right) \longrightarrow \boldsymbol{R}$ *v stacionárnom bode* $\boldsymbol{a}$ *v smere* $\boldsymbol{h}=(h,k)$

$$D^2 f_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{h}) = \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x^2}h^2 + 2\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial y \partial x}hk + \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial y^2}k^2$$

je

a) kladne definitný, vtedy a len vtedy ak

$$\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x^2} > 0 \quad a \quad \det H(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial y \partial x}\right)^2 > 0,$$

potom v stacionárnom bode $\boldsymbol{a}$ *funkcie* f *je ostré lokálne minimum funkcie* f,

b) záporne definitný, vtedy a len vtedy ak

$$\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x^2} < 0 \quad a \quad \det H(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial y \partial x}\right)^2 > 0,$$

potom v stacionárnom bode $\boldsymbol{a}$ *funkcie* f *je ostré lokálne maximum funkcie* f,

c) indefinitný, vtedy a len vtedy ak

$$\det H(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial y \partial x}\right)^2 < 0,$$

potom je stacionárny bod $\boldsymbol{a}$ *funkcie* f *sedlový bod.*

Example 272 *Nájdite stacionárne body funkcie* $f : \boldsymbol{R}^2 \longrightarrow \boldsymbol{R}$, $f(x,y) = x^2y + xy^2 - 3xy$ *a určte ich druh.*

Solution 273 $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy + y^2 - 3y$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 + 2xy - 3x$. *Ak položíme*

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (0,0),$$

dostaneme stacionárne body $(0,0)$, $(1,1)$, $(3,0)$, $(0,3)$. *Potom máme*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2x + 2y - 3,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x.$$

Tak pre bod:

$(0,0)$ *je* $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0$ *a* $\det H(0,0) = -9 < 0$ *sedlo,*

$(1,1)$ *je* $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = 2$ *a* $\det H(1,1) = 3 > 0$ *lokálne minimum* $\min f(\boldsymbol{x}) = f(1,1) = -1$,

$(3,0)$ *je* $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(3,0) = 0$ *a* $\det H(3,0) = -9 < 0$ *sedlo,*

$(0,3)$ *je* $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,3) = 0$ *a* $\det H(0,3) = -9 < 0$ *sedlo.*

Použitím druhého diferenciálu (kvadratickej formy) dostaneme samozrejme ten istý výsledok, ale pre lepší prehľad ho tu uvedieme. V bode

$(0,0)$ *je kvadratická forma* $D^2 f_{(0,0)}((h,k)) = -6hk$ *indefinitná,*

$(1,1)$ *je* $D^2 f_{(1,1)}((h,k)) = 2h^2 + 2hk + 2k^2 = 2\left(h + \frac{k}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}k^2$ *kladne definitná, lokálne minimum* $\min f(\boldsymbol{x}) = f(1,1) = -1$,

$(3,0)$ *je* $D^2 f_{(3,0)}((h,k)) = 6\left[\left(k + \frac{h}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}h^2\right]$ *indefinitná,*

$(0,3)$ *je* $D^2 f_{(0,3)}((h,k)) = \left[\left(h + \frac{k}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}k^2\right]$ *indefinitná.* $\square$

Ďalšou metódou ako určiť, či je druhý diferenciál kladne, alebo záporne definitný je Sylvestrovo kritérium, ktoré nebudeme dokazovať, jeho dôkaz plynie z výsledkov lineárnej algebry.

Theorem 274 *(Sylvestrovo kritérium) Pre funkciu* $f : G\,(\subset \boldsymbol{R}^n) \longrightarrow \boldsymbol{R}$, $f \in C^2(G)$ *druhý diferenciál* $D^2 f_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{h})$, $\boldsymbol{h} \neq \boldsymbol{0}$ *je kladne (záporne) definitná kvadratická forma vtedy a len vtedy ak*

$$\Delta_k > 0, \left((-1)^k \Delta_k > 0\right), k = 1, 2, \ldots, n$$

kde

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kk} \end{vmatrix}, \quad \textit{pričom} \quad a_{ij} = \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_j \partial x_i} = a_{ji}.$$

Ak $\Delta_n \neq 0$ *a kvadratická forma nie je definitná, potom je indefinitná.*

Example 275 *Nájdite extrémy funkcie*

$$f : \boldsymbol{R}^3 \longrightarrow \boldsymbol{R},\ f(x,y,z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z.$$

Solution 276

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 3x^2 + 12y,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 2y + 12x,$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 2z + 2.$$

V kritickom bode platí

$$\nabla f(x,y,z) = \boldsymbol{0} \quad t.j. \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 0.$$

Potom

$$z = -1,\ y = -6x,\ 3x^2 - 72x = 0 \Longrightarrow x_1 = 0, x_2 = 24.$$

Stacionárne body sú $\boldsymbol{a}^1 = (0,0,-1)$, $\boldsymbol{a}^2 = (24,-144,-1)$, *ďalej máme*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) = 6x,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) = 12,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) = 2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z) = 0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) = 2.$$

Potom v bode $\boldsymbol{a}^1 = (0,0,-1)$ *podľa Sylvestrovho kritéria*

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -288 < 0,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 12 \\ 12 & 2 \end{vmatrix} = -144 < 0,\ \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 \end{vmatrix} = 0,$$

nie je extrém, je to sedlový bod. To isté tvrdenie dostaneme, ak použijeme druhý diferenciál:

$$D^2 f_{\boldsymbol{a}^1}(\boldsymbol{h}) = \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a}^1)}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j = 24h_1h_2 + 2h_2^2 + 2h_3^2,$$

odkiaľ plynie, že pre $\boldsymbol{h}^1 = (1,-1,1)$ *máme:* $D^2 f_{\boldsymbol{a}^1}(\boldsymbol{h}) = -20,$ *pre* $\boldsymbol{h}^2 = (1,1,1)$ *máme:* $D^2 f_{\boldsymbol{a}^1}(\boldsymbol{h}) = 28.$ *Druhý diferenciál je indefinitná kvadratická forma a bod* $\boldsymbol{a}^1$*je sedlový bod. V bode* $\boldsymbol{a}^2 = (24,-144,-1)$ *podľa Sylvestrovho kritéria*

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 144 & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 288 > 0,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 144 & 12 \\ 12 & 2 \end{vmatrix} = 144 > 0,\ \Delta_1 = |144| = 144 > 0,$$

je $f(24,-144,-1) = -6913$ *lokálne (relatívne) minimum. Ak použijeme druhý diferenciál:*

$$D^2 f_{\boldsymbol{a}^2}(\boldsymbol{h}) = \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a}^2)}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j = 144h_1^2 + 24h_1h_2 + 2h_2^2 + 2h_3^2 = 2\left[(6h_1+h_2)^2 + 36h_1^2 + h_3^2\right] > 0,\ \forall \boldsymbol{h} \neq \boldsymbol{0},$$

odkiaľ plynie, že druhý diferenciál je kladne definitná kvadratická forma a v bode $\boldsymbol{a}^2$ *funkcia nadobúda lokálne minimum* $f(24,-144,-1) = -6913.$ □

Vhodným príkladom je aj metóda najmenších štvorcov, t.j. úloha preložiť priamku $y = mx + c$ bodmi $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\ldots,(x_p,y_p)$. Pritom chceme aby $f(m,c) = \sum_{i=1}^{p}(y_i - mx_i - c)^2$ bola čo najmenšia.

Remark 277 *Ak test druhou deriváciou v bode* $\boldsymbol{a} = (a,b,c)$ *zlyhá, potom treba skúmať priamo rozdiel* $f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a}) = f(a+h,b+k,c+l) - f(a,b,c)$ *pre každé* $\boldsymbol{h} = (h,k,l)$.

Example 278 *Ukážte, že jediný stacionárny bod funkcie*

$$f : \boldsymbol{R}^3 \longrightarrow \boldsymbol{R},\ f(x,y,z) = \operatorname{arctg}(x^2+y^2+z^2) - (xy+yz+xz)$$

je bod $(0,0,0)$ *a určte jeho druh.*

Solution 279

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \frac{2x}{1+(x^2+y^2+z^2)^2} - (y+z),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \frac{2y}{1+(x^2+y^2+z^2)^2} - (z+x),$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \frac{2z}{1+(x^2+y^2+z^2)^2} - (x+y).$$

V kritickom bode platí

$$\nabla f(x,y,z) = \mathbf{0} \quad t.j. \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 0.$$

Potom aj

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = (x-y)\left[1 + \frac{2}{1+(x^2+y^2+z^2)^2}\right], \ \textit{t.j.} \quad x = y.$$

Pretože vzťahy sú symetrické, dostaneme napokon $x = y = z$. Teda stacionárny bod bude mať súradnice (x,x,x), odkiaľ

$$\frac{2x}{1+9x^4} - 2x = 0, \ \textit{t.j.} \ x = 0.$$

Teda $(0,0,0)$ je stacionárny bod. Ak urobíme test druhou deriváciou, tento zlyhá (presvedčte sa o tom). Vyjadríme si rozdiel

$$f(h,k,l) - f(0,0,0) = \operatorname{arctg}\left(h^2+k^2+l^2\right) - (hk+kl+hl)$$

Pre funkciu $\operatorname{arctg} u$ *použijeme Taylorov rozvoj:*

$$\operatorname{arctg} u = u - \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} - \dots, \quad \textit{pre} \quad |u| < 1.$$

Potom pre (h,k,l) blízko $(0,0,0)$ máme

$$f(h,k,l) - f(0,0,0) = h^2+k^2+l^2 - \frac{(h^2+k^2+l^2)^3}{3} - (hk+kl+hl) + E,$$

kde E pozostáva z výrazov vyšších rádov. Potom pre dostatočne malé h máme

$$f(h,0,0) = h^2 - \frac{h^6}{3} > 0, \quad \textit{zatiaľ čo} \ \ f(h,h,h) = -9h^6 < 0.$$

Teda bod $(0,0,0)$ je sedlový bod. $\square$

Cvičenia.

V nasledujúcich príkladoch nájdite lokálne extrémy funkcií

1. $f(x,y) = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$. $\big[f(0,0) = 0$ lokálne minimum, sedlové body $(1,4)$, $(1,-4)$, $\big(-\frac{5}{3},$

2. $f(x,y) = e^{2x}\left(x + y^2 + 2y\right)$.
   $\left[f\left(\frac{1}{2},-1\right) = -\frac{e}{2}\right.$ lokálne minimum$\big]$

3. $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy + 2$.
   $[f(-1,-1) = 3$ lokálne maximum, sedlový bod $(0,0)]$

4. $f(x,y) = 5xy + \frac{25}{x} + \frac{8}{y}$, $x > 0$, $y > 0$.
   $\left[f\left(\frac{5}{2},\frac{4}{5}\right) = 30\right.$ lokálne minimum$\big]$

5. $f(x,y) = \frac{1}{2}y + (47 - x - y)\left(\frac{x}{3} + \frac{y}{4}\right)$.
   $[f(21,20) = 282$ lokálne maximum$]$

6. $f(x,y) = xy(2 - x - y)$.
   $\left[f\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{27}\right.$ lokálne maximum , sedlové body $(0,0)$, $(0,2)$, $(2,0)\big]$

7. $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}\left(2y^2 + x^2\right)$. $\big[f(0,0) = 0$ lokálne minimum, $f(0,1) = \frac{2}{e}$, $f(0,-1) = \frac{2}{e}$ lokáln

8. $f(x,y) = x^2y^2(3 - 4x + 6y)$.

$$\left[\begin{array}{c} f\left(\frac{3}{10},-\frac{1}{5}\right) = \frac{27}{12400} \text{ lokálne maximum,} \\ \text{v bodoch } \left\{(x,0) : x > \frac{3}{4}\right\} \wedge \left\{(0,y) : y < \frac{1}{2}\right\} \text{ sú lokálne maximá, pre ktoré } f(.,.) = 0, \\ \text{v bodoch } \left\{(x,0) : x < \frac{3}{4}\right\} \wedge \left\{(0,y) : y > \frac{1}{2}\right\} \text{ sú lokálne minimá, pre ktoré } f(.,.) = 0, \\ \text{sedlové body } \left(\frac{3}{4},0\right) a \left(0,\frac{1}{2}\right). \end{array}\right]$$

9. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + 2z + x$.
   $\left[f\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-1\right) = -\frac{4}{3}\right.$ lokálne minimum$\big]$

10. $f(x,y,z) = 3x^2 + 3x + 2y^2 + 2yz + 2y + 2z^2 - 2z$.
    $\left[f\left(-\frac{1}{2},-1,1\right) = -\frac{11}{4}\right.$ lokálne minimum$\big]$

11. $f(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + 2z - xy - xz$.
    $[(2,1,7)$ - sedlový bod$]$

12. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$.
    $[f(-1,-2,3) = -14$ lokálne minimum$]$

13. $f(x,y,z) = y^2 + 2z^2 + 2x - xy - xz$.
    $\left[\left(\frac{8}{3},\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right)\right.$ - sedlový bod$\big]$

14. $f(x,y,z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$. $[f(24,-144,-1) = -6913$ lokálne minimum, $(0,0,-1)$ - sed

Veta o funkcii určenej implicitne.

Skúmajme množinu bodov $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$, ktoré spĺňajú rovnicu $F(x, y) = 0$, kde F je daná funkcia dvoch premenných. Analytická geometria nám poskytuje mnoho príkladov kriviek, ktoré v kartézskom súradnicovom systéme spĺňajú funkciu typu $F(x, y) = 0$. Napríklad rovnica kružnice: $x^2+y^2-1 = 0$, alebo rovnica priamky $x+y-1 = 0$. Bude nás zaujímať aké vlastnosti funkcie F zaručia, že rovnica $F(x, y) = 0$ definuje jednoznačne hodnotu y pre nejaké x, t.j. kedy rovnica $F(x, y) = 0$ definuje jednoznačne funkciu jednej premennej $f : y = f(x)$.

Example 280 *Nájdite množinu bodov v $\boldsymbol{R}^2$, ktorá spĺňa rovnicu $x^2 + y^2 + 1 = 0$.*

Solution 281 *V $\boldsymbol{R}^2$ neexistujú body, ktoré spĺňajú danú rovnicu. Teda hľadaná množina bodov je prázdna.*□

Example 282 *Nájdite množinu bodov v $\boldsymbol{R}^2$, ktorá spĺňa rovnicu $x^2 + y^2 = 0$.*

Solution 283 *V $\boldsymbol{R}^2$ existuje jediný bod, ktorý spĺňa danú rovnicu a to začiatok súradnicovej sústavy* - $(0, 0)$. □

Example 284 *Nájdite množinu bodov v $\boldsymbol{R}^2$, ktorá spĺňa rovnicu $2x + y - 4 = 0$.*

Solution 285 *Je to množina bodov, ktoré ležia na priamke. Pre každé $x \in \boldsymbol{R}$ existuje jediné $y = 4-2x$. Potom rovnica $2x+y-4 = 0$ definuje jednoznačne funkciu $y = f(x)$, $\forall x$ a $F(x, y) = 2x + y - 4 = 0$ má vlastnosť $F(x, f(x)) = 0$, $\forall x \in \boldsymbol{R}$.*□

Example 286 *Nájdite množinu bodov v $\boldsymbol{R}^2$, ktorá spĺňa rovnicu $x^2 + y^2 - 1 = 0$.*

Solution 287 *Daná rovnica je rovnicou kružnice so stredom v bode $(0, 0)$. Pre každé $x \in (-1, 1)$ vieme nájsť dve hodnoty y také, že $x^2 + y^2 - 1 = 0$. To znamená, že danú rovnicu spĺňa nekonečne veľa funkcií, napríklad: $f : (-1, 1) \longrightarrow \boldsymbol{R}$*

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \text{pre } x \in \langle -1, a \rangle \\ -\sqrt{1-x^2} & \text{pre } x \in (a, 1\rangle \end{cases}, \ a \in (-1, 1) \ .$$

Potom $f(x)$ spĺňa rovnicu $F(x, f(x)) = x^2 + f^2(x) - 1 = 0$.□

Nebudeme sa zaujímať iba o existenciu takej funkcie $y = f(x)$ danej rovnicou $F(x, y) = 0$ ale aj o jej spojitosť a diferencovateľnosť. Ak v poslednom príklade vyberieme bod (a_1, a_2) taký že $F(a_1, a_2) = a_1^2 + a_2^2 - 1 = 0$. Potom tvrdíme, že pre ľubovoľný bod (a_1, a_2), $a_1 \neq \pm 1$ taký, že $F(a_1, a_2) = 0$ existuje jediná spojitá funkcia $y = f(x)$ definovaná v nejakom okolí bodu $x = a_1$ taká, že $F(x, f(x)) = 0$ pre každé x z tohto okolia bodu a_1a platí $f(a_1) = a_2$. Teda každý bod (a_1, a_2) z jednotkovej kružnice s výnimkou bodov $(-1, 0)$ a $(1, 0)$ leží na grafe spojitej funkcie $y = f(x) = \sqrt{1-x^2}$ ak $a_2 > 0$, ktorá spĺňa rovnicu $x^2+y^2-1 = 0$. Ale v žiadnom bode z okolia bodu $a_1 = -1$ alebo $a_1 = 1$ neexistuje funkcia $y = f(x)$ definovaná rovnicou $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Definition 288 *(Funkcia definovaná implicitne.) Nech* $\boldsymbol{a}=(a,b)$, $O(\boldsymbol{a})\subset A\subset \mathbf{R}^2$ *a* $F:A\longrightarrow \mathbf{R}$ *a nech platí*

$$F(a,b)=0.$$

Ak existuje funkcia

$$f:O(a)\longrightarrow O(b)\,,\ y=f(x)\,,$$

($O(a)$, $O(b)$ sú okolia bodov a resp. b), taká že

$$F(x,f(x))=0,\ \forall x\in O(a)\,,$$

ktorá spĺňa podmienku

$$f(a)=b$$

hovoríme, že f je funkcia definovaná implicitne v $O(\boldsymbol{a})$ rovnicou $F(x,y)=0$.

V dôkaze vety o implicitnej funkcii budeme potrebovať nasledujúcu vetu.

Theorem 289 *(Veta o pevnom bode) Nech $X\subset \mathbf{R}^n$ je uzavretá podmnožina a nech $\boldsymbol{f}:X\longrightarrow X$ je kontrakcia. Potom $\boldsymbol{f}$ má v X jediný pevný bod, t.j. existuje jediný bod $\boldsymbol{z}\in X$ taký, že $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})=\boldsymbol{z}$.*

Theorem 290 *(Veta o implicitnej funkcii) Nech $F:A\longrightarrow \mathbf{R}$, kde $A\subset \mathbf{R}^2$ je otvorená množina a $F\in C^k(A)$, $k\geq 1$. Nech $\boldsymbol{a}=(a,b)\in A$ je taký, že $F(\boldsymbol{a})=0$ a $\frac{\partial F(\boldsymbol{a})}{\partial y}\neq 0$. Potom existujú okolia $O(a)$, $O(b)$, $O(a)\times O(b)\subset A$ a jediná funkcia $f:O(a)\longrightarrow O(b)$ taká, že*

$$F(x,f(x))=0,\ \forall x\in O(a)\,,$$

$$f(a)=b,$$

funkcia f je z triedy $C^k(O(a))$ a

$$f'(x)=-\frac{\frac{\partial F(x,f(x))}{\partial x}}{\frac{\partial F(x,f(x))}{\partial y}},\ \forall x\in O(a)\,.$$

Example 291 *Nech $F(x,y)=x^2+y^2-1$. Zistite, či veta o implicitne určenej funkcii platí pre bod*

a) $\boldsymbol{a}=(0,1)$
b) $\boldsymbol{a}=(1,0)$

Solution 292 *a) Platí: funkcia $F\in C^\infty\left(\mathbf{R}^2,\mathbf{R}\right)$, $F(0,1)=0$, $\frac{\partial F(0,1)}{\partial y}=2y|_{y=1}=2\neq 0$. Predpoklady vety o implicitnej funkcii sú splnené, teda funkcia $F(x,y)=0$ a bod $\boldsymbol{a}=(0,1)$ implicitne určujú v $O(0)$ funkciu $f:O(0)\longrightarrow O(1)$ takú, že $f(0)=1$ a $F(x,f(x))=0$, $\forall x\in O(0)$. Naozaj funkcia $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ je touto hľadanou funkciou. Pre jej deriváciu z vety o implicitnej funkcii dostaneme: $f'(x)=-\frac{\frac{\partial F(x,f(x))}{\partial x}}{\frac{\partial F(x,f(x))}{\partial y}}=-\frac{2x}{2y}|_{y=f(x)}=-\frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}}=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $\forall x\in O(0)$. Taký istý výsledok dostaneme, ak priamo derivujeme funkciu $f(x)=\sqrt{1-x^2}$.*

b) V tomto prípade síce platí, že $F(0,1)=0$, ale $\frac{\partial F(1,0)}{\partial y}=2y|_{y=0}=0$. To znamená, že predpoklady vety nie sú splnené a v tomto bode neexistuje implicitne určená funkcia.□

Example 293 *Nech* $F(x,y) = x^3 + y^3 - 1$. *Zistite, či veta o implicitne určenej funkcii platí pre bod* $(1,0)$.

Solution 294 *a) Platí: funkcia* $F \in C^\infty(\boldsymbol{R}^2, \boldsymbol{R})$, $F(0,1) = 0$, *ale* $\frac{\partial F(1,0)}{\partial y} = 3y^2|_{y=0} = 0$. *To znamená, že predpoklady vety nie sú splnené a veta tvrdí, že tomto bode neexistuje implicitne určená funkcia. Avšak* $x^3+y^3-1 = 0 \Longleftrightarrow y = (1-x^3)^{\frac{1}{3}}$, *čo existuje* $\forall x \in \boldsymbol{R}$. *To znamená, že funkcia implicite určená rovnicou* $x^3+y^3-1 = 0$ *a bodom* $(1,0)$ *existuje, čo zaroveň ukazuje, že predpoklady vety sú iba postačujúce pre existenciu implicitne určenej funkcie, ale nie sú nutné.*$\square$

Example 295 *Nech* $F(x,y) = ye^x + e^y$. *Nájdite, ak existuje funkciu určenú implicitne rovnicou* $F(x,y) = 0$ *a bodom* $\boldsymbol{a} = (-1,-1)$.

Solution 296 *Platí: funkcia* $F \in C^\infty(\boldsymbol{R}^2, \boldsymbol{R})$, $F(-1,-1) = 0$, $\frac{\partial F(-1,-1)}{\partial y} = e^x + e^y|_{(x,y)=(-1,-1)} = 2e^{-1} \neq 0$. *Predpoklady vety o implicitnej funkcii sú splnené, teda funkcia* $F(x,y) = 0$ *a bod* $\boldsymbol{a} = (-1,-1)$ *implicitne určujú v* $O(-1)$ *funkciu* $f : O(-1) \longrightarrow O(-1)$ *takú, že* $f(-1) = -1$ *a* $F(x, f(x)) = 0$, $\forall x \in O(-1)$. *Funkciu nevieme vyjadriť pomocou elementárnych funkcií, ale pre jej deriváciu podľa vety o implicitnej funkcii dostaneme:*

$$f'(x) = -\frac{\frac{\partial F(x,f(x))}{\partial x}}{\frac{\partial F(x,f(x))}{\partial y}} = -\frac{ye^x}{e^x + e^y}|_{y=f(x)} = -\frac{e^x f(x)}{e^x + e^{f(x)}}, \ \forall x \in O(-1).\square$$

Viazané extrémy.

Často hľadáme extrémy problémov, pri ktorých sú prítomné dodatočné podmienky. Napríklad problém určenia najväčšieho objemu valca s daným povrchom (najekonomickejší tvar), alebo problém hľadania bodu na danej krivke najbližšie od začiatku súradnicovej sústavy. Tieto problémy majú nasledujúcu formu: hľadáme extrémy funkcie $f(\boldsymbol{x})$, pričom platí podmienka $g(\boldsymbol{x}) = 0$. Tak namiesto hľadania extrémov funkcie f s $\boldsymbol{x}$, ktoré sa voľne menilo, $\boldsymbol{x}$ teraz musí spĺňať rovnicu $g(\boldsymbol{x}) = 0$. Nech $S = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n; g(\boldsymbol{x}) = 0\}$. Je to hladina funkcie g. Ak napríklad $n = 3$, je to plocha. Tak extrémy funkcie f, ktorá spĺňa podmienku $g(\boldsymbol{x}) = 0$ sú extrémami funkcie $f|_S$.Napríklad ak f má lokálne minimum v bode $\boldsymbol{a}$, pričom je splnená podmienka $g(\boldsymbol{a}) = 0$, pre $\boldsymbol{a} \in S$, potom existuje okolie U bodu $\boldsymbol{a}$ také, že $f(\boldsymbol{x}) \geq f(\boldsymbol{a})$ pre každé $\boldsymbol{x} \in S \cap U$. Jeden prístup k hľadaniu viazaných extrémov je taký, že použijeme rovnicu $g(\boldsymbol{x}) = 0$ priamo, aby sme problém zjednodušili.

Example 297 *Nájdite extrémy funkcie* $f(x,y) = \sqrt{3}x + y$, *keď* $x^2 + y^2 = 1$.

Solution 298 *Hľadáme extrémy funkcie* f *na kružnici s polomerom* 1. *Ak položíme*

$$x = \cos\Theta,\ y = \sin\Theta,\ 0 \leq \Theta \leq 2\pi,$$

potom hľadáme extrémy funkcie $f(\Theta) = \sqrt{3}\cos\Theta + \sin\Theta$. *T.j.* $f'(\Theta) = -\sqrt{3}\sin\Theta + \cos\Theta$, *to znamená že stacionárne body sú* $\operatorname{tg}\Theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$, *čiže* $\Theta = \frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$. *Máme* $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2$ *a* $f\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -2$. *Toto sú maximum a minimum* f *na jednotkovej kružnici. Je samozrejme možný aj iný prístup, ak vyjadríme* $y = \sqrt{1-x^2}$ *a* $y = -\sqrt{1-x^2}, \ldots$ $\square$

Example 299 *Nájdite extrémy funkcie* $f(x,y) = x^2 - 2x + y^2$ *na krivke* $y^2 = 3x$.

Solution 300 *Problém je ekvivalentný s hľadaním extrémov funkcie* $f(x) = x^2 + x$. *Potom* $f'(x) = 2x + 1$,*teda* $x = -\frac{1}{2}$ *je stacionárny bod. Avšak bod* $x = -\frac{1}{2}$ *nezodpovedá žiadnemu bodu na krivke* $y^2 = 3x$,*pretože* $y^2 \geq 0$. *Kde je teda chyba? „Zabudli“ sme povedať, kde je funkcia* $f(x)$ *definovaná. Pretože* $y^2 = 3x$, *tak* $x \geq 0$ *a teda funkcia* $f(x) = x^2 + x$ *je definovaná pre* $x \geq 0$. *Ľahko vidieť, že* $f'(x) = 2x+1 \geq 1$ *na* $\langle 0, \infty)$, *teda* f *je rastúca s minimálnou hodnotou* $f(0) = 0$.□

V predchádzajúcich príkladoch bolo riešenie jednoduché. Sú však problémy, kde podmienku (väzbu) nemožno redukovať na problém jednej premennej. Vtedy aplikujeme inú metódu, ktorú geometricky popíšeme:

Predpokladajme, že chceme maximalizovať $f(\boldsymbol{x})$ s väzbou $g(\boldsymbol{x}) = 0$. Aby sme mohli podať názornejšiu interpretáciu budeme pracovať v priestore $\boldsymbol{R}^3$. Potom podmienka $g(\boldsymbol{x}) = 0$ je plocha S - hladina funkcie g a chceme maximalizovať $f(\boldsymbol{x})$ pre $\boldsymbol{x} \in S$. Ak $\boldsymbol{a} \in S$ je lokálne maximum funkcie $f|_S$ nemôžme hovoriť, že $f(\boldsymbol{a})$ je maximom v každom pevnom smere, ale iba v tých smeroch, ktoré odpovedajú bodom ležiacim v S. Inými slovami smerové derivácie funkcie f budú nulové pre všetky smery, ktoré sú dotykové ku S v bode $\boldsymbol{a}$.Ak $\mathbf{T}$ je ľubovoľná dotyčnica ku S v bode $\boldsymbol{a}$,máme $\nabla f(\boldsymbol{a}) \cdot \mathbf{T} = 0$. To znamená, že $\nabla f(\boldsymbol{a})$ je rovnobežné s $\nabla g(\boldsymbol{a})$ (pozri **??**), inými slovami existuje taký skalár λ taký, že $\nabla f(\boldsymbol{a}) = \lambda \nabla g(\boldsymbol{a})$. Iný spôsob ako dostať tento výsledok je, že pripomenieme, že $\nabla f(\boldsymbol{a})$ udáva smer najväčšieho rastu f. Ak $\nabla f(\boldsymbol{a})$ nie je ortogonálne ku S, môžme sa v množine S pohybovať, pretože f rastie a v bode $\boldsymbol{a}$ nie je maximum.

Theorem 301 *(Lagrangeove multiplikátory) Nech* $G \subseteq \boldsymbol{R}^n$ *je otvorená a nech* $f, g : G\,(\subset \boldsymbol{R}^n) \longrightarrow \boldsymbol{R}$ *sú z triedy* $C^1(G)$. *Nech* $S = \{\boldsymbol{x} \in G; g(\boldsymbol{x}) = 0\}$ *a predpokladajme, že* f *nadobúda viazaný extrém v bode* $\boldsymbol{a} \in S$. *Potom ak* $\nabla g(\boldsymbol{a}) \neq \mathbf{0}$, *existuje* $\lambda \in \boldsymbol{R}$ *také, že*

$$\nabla f(\boldsymbol{a}) = \lambda \nabla g(\boldsymbol{a}). \tag{(1)}$$

Rovnicu (1) môžme dostať tak, že uvažujeme tzv. Lagrangeovu funkciu L, ktorú definujeme:

$$L = f - \lambda g,$$

kde f je funkcia ktorej extrémy hľadáme a g je väzba. V bode $\boldsymbol{a} \in S \cap G$, v ktorom je funkcia diferencovateľná máme:

$$\nabla L(\boldsymbol{a}) = \nabla f(\boldsymbol{a}) - \lambda \nabla g(\boldsymbol{a}).$$

Podmienka (1) znamená, že existuje číslo λ také, že v stacionárnom bode $\boldsymbol{a}$ je $\nabla L(\boldsymbol{a}) = \mathbf{0}$. Potom problém ako nájsť takýto stacionárny bod je ekvivalentný s riešením systému $n + 1$ rovníc

$$\frac{\partial L(\boldsymbol{a})}{\partial x_1} = 0, \ldots, \frac{\partial L(\boldsymbol{a})}{\partial x_n} = 0, g(\boldsymbol{a}) = 0$$

s $n + 1$ neznámymi $\lambda, a_1, a_2, \ldots, a_n$, kde $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Poznamenajme, že veta 290 o Lagrangeových multiplikátoroch dáva nutnú podmienku pre extrém. Hovorí, že všetky možné extrémy sa vyskytujú v bodoch $\boldsymbol{a} \in S$, kde $\nabla f(\boldsymbol{a}) = \lambda \nabla g(\boldsymbol{a})$, alebo v bodoch $\boldsymbol{b}$, kde $\nabla g(\boldsymbol{b}) = \mathbf{0}$, ale nie v každom takomto bode extrém skutočne je.

Example 302 *Nájdite body na ploche $z^2 = xy + 1$, ktoré ležia najbližšie k začiatku súradnicovej sústavy - bodu $(0,0,0)$.*

Solution 303 *Nech $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2, g(x,y,z) = xy + 1 - z^2$. Potom*

$$\nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z)$$

nám dáva rovnice:

$$\nabla f(x,y,z) = (2x, 2y, 2z),\ \nabla g(x,y,z) = (y, x, -2z)$$

$$2x = \lambda y; 2y = \lambda x,\ 2z = -2\lambda z,\ xy - z^2 + 1 = 0$$

Riešením tohto systému dostaneme body:

$$ak\ \ \lambda = -1,\ (0,0,1),\ (0,0,-1);\quad ak\ \ \lambda = -2,\ (1,-1,0),\ (-1,1,0)$$

a máme

$$f(0,0,1) = 1 = f(0,0,-1) - minimum$$

$f(1,-1,0) = 2 = f(-1,1,0) -$ *ani minimum ani maximum (z geometrického náhľadu).* □

Remark 304 *V predošlom prípade bolo jasné (z geometrického náhľadu), že minimum existuje, ale maximum nie.*

Je prirodzené, že by sme potrebovali podobný test ako test druhými deriváciami, preto uvedieme postačujúcu podmienku pre existenciu extrému s väzbou.

Theorem 305 *(Postačujúca podmienka). Nech $G \subseteq \boldsymbol{R}^n$ je otvorená a nech funkcie $f, g : G\,(\subset \boldsymbol{R}^n) \longrightarrow \boldsymbol{R}$ sú triedy $C^2(G)$. Nech $S = \{\boldsymbol{x} \in G; g\,(\boldsymbol{x}) = 0\}$ a predpokladajme, že f má v bode $\boldsymbol{a} \in S$ stacionárny bod (t.j. $\nabla f(\boldsymbol{a}) = \lambda \nabla g(\boldsymbol{a})$, $g(\boldsymbol{a}) = 0$). Nech Lagrangeova funkcia $L : G \longrightarrow \boldsymbol{R}$, $L(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) - \lambda g(\boldsymbol{x})$ je vytvorená pomocou Lagrangeových multiplikátorov. Nech $D^2 L_{\boldsymbol{x}}\,(\boldsymbol{h})$ je kvadratická forma*

$$D^2 L_{\boldsymbol{x}}\,(\boldsymbol{h}) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 L\,(\boldsymbol{x})}{\partial x_j \partial x_i} h_i h_j$$

definovaná na množine $T_{\boldsymbol{a}}(S) = \{\boldsymbol{h} \in \boldsymbol{R}^n; \nabla g(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{h} = 0\}$, t.j. množina vektorov dotýkajúcich sa S v bode $\boldsymbol{a}$. Potom ak

a) $D^2 L_{\boldsymbol{a}}\,(\boldsymbol{h})$ je kladne definitná pre každé $\boldsymbol{h} \in T_{\boldsymbol{a}}(S)$, v bode $\boldsymbol{a}$ je ostré lokálne minimum funkcie f s väzbou $g\,(\boldsymbol{x}) = 0$,

b) $D^2 L_{\boldsymbol{a}}\,(\boldsymbol{h})$ je záporne definitná pre každé $\boldsymbol{h} \in T_{\boldsymbol{a}}(S)$, v bode $\boldsymbol{a}$ je ostré lokálne maximum funkcie f s väzbou $g\,(\boldsymbol{x}) = 0$,

c) $D^2 L_{\boldsymbol{a}}\,(\boldsymbol{h})$ je indefinitná na $T_{\boldsymbol{a}}(S)$, bod $\boldsymbol{a}$ je sedlový bod funkcie f s väzbou $g\,(\boldsymbol{x}) = 0$.

Example 306 *Zistite druh stacionárnych bodov v predchádzajúcom príklade.*

Solution 307 *V predchádzajúcom príklade sme už určili o aký druh stacionárnych bodov sa jedná, teraz to potvrdíme pomocou predchádzajúcej vety. Označme*

$$\begin{array}{lcl} ak\ \lambda & = & -1\ \ máme\ body\ \ \boldsymbol{a}^{(1)} = (0,0,1),\ \boldsymbol{a}^{(2)} = (0,0,-1) \\ ak\ \lambda & = & -2\ \ máme\ body\ \ \boldsymbol{a}^{(3)} = (1,-1,0),\ \boldsymbol{a}^{(4)} = (-1,1,0). \end{array}$$

Nájdeme hodnoty pre $D^2L_{\boldsymbol{a}^{(1)}}(\boldsymbol{h})$ *a* $D^2L_{\boldsymbol{a}^{(3)}}(\boldsymbol{h})$ *. Jednoduchým výpočtom sa presvedčíme, že*

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2,\ \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} = -\lambda,\ \frac{\partial^2 L}{\partial z \partial x} = 0,\ \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 2,\ \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} = 2,\ \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} = 2 + 2\lambda.$$

Potom pre ľubovoľné $\boldsymbol{h} = (h,k,l)$ *máme:*

$$D^2L_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{h}) = 2h^2 - 2\lambda hk + 2k^2 + (2+2\lambda)l^2.$$

Pre bod $\boldsymbol{a}^{(1)}$ *máme:*

$$\nabla g(\boldsymbol{a}^{(1)}) = (y,x,-2z)|_{(0,0,1)} = (0,0,-2),$$

potom

$$\boldsymbol{h} \in T_{\boldsymbol{a}^{(1)}}(S) \Longrightarrow (0,0,-2)\cdot(h,k,l) = 0 \Longrightarrow -2l = 0 \Longrightarrow l = 0,$$

teda dotykový vektor má tvar $\boldsymbol{h} = (h,k,0)$, *kde* $h,k \in \boldsymbol{R}$. *Potom*

$$D^2L_{\boldsymbol{a}^{(1)}}(\boldsymbol{h}) = 2h^2 + 2hk + 2k^2 = h^2 + k^2 + (h+k)^2 > 0.$$

Kvadratická forma je kladne definitná, to znamená že v bode $\boldsymbol{a}^{(1)}$ *je ostré lokálne minimum. Pre bod* $\boldsymbol{a}^{(3)}$ *máme*

$$\nabla g(\boldsymbol{a}^{(3)}) = (-1,1,0) \Longrightarrow \boldsymbol{h} \in T_{\boldsymbol{a}^{(3)}}(S) \Longrightarrow \boldsymbol{h} = (h,h,l).$$

Potom

$$D^2L_{\boldsymbol{a}^{(3)}}(\boldsymbol{h}) = 2h^2 + 4h^2 + 2h^2 - 2l^2 = 8h^2 - 2l^2.$$

Kvadratická forma je indefinitná, to znamená že v bode $\boldsymbol{a}^{(3)}$ *je sedlo.* □

Podobné vety platia aj pre hľadanie extrémov danej funkcie s viacerými väzbami, ale my sa tu nimi nebudeme zaoberať.

Extrémy na kompaktných množinách.

Podľa vety 200 spojitá funkcia nadobúda na kompaktnej (uzavretej a ohraničenej) množine svoje minimum aj maximum. Tieto extrémy budeme hľadať nasledujúcim spôsobom:

- najprv ak $int(A) \neq \emptyset$ nájdeme stacionárne body funkcie f, aby sme určili možné lokálne extrémy v $int(A)$.
- uvažujeme body z ∂A.Často sa dá pre body z časti hranice $\boldsymbol{x} \in \partial A$ písať, že sú to body, ktoré spĺňajú rovnicu $g(\boldsymbol{x}) = 0$, teda na hranici kompaktnej množiny je to problém viazaných extrémov,

- z nich vyberieme najväčšie a najmenšie hodnoty.

Example 308 *Nájdite najväčšiu a najmenšiu hodnotu funkcie* $f(x,y,z) = x^2 - xy + y^2 - z^2$ *na a vo vnútri elipsoidu* $3x^2 + 3y^2 + z^2 = 4$.

Solution 309 *Elipsoid + vnútro nám dáva kompaktnú množinu*

$$A = \{(x,y,z) \in \boldsymbol{R}^3; 3x^2 + 3y^2 + z^2 \leq 4\}.$$

Stacionárne body vnútra elipsoidu (ak existujú) vyhovujú rovnici

$$\nabla f(x,y,z) = (2x - y, 2y - x, -2z) = (0,0,0).$$

Riešením je teda jediný stacionárny bod $(0,0,0) \in int(A)$ *a* $f(0,0,0) = 0$. *Pomocou testu cez druhé derivácie dostaneme, že je to sedlový bod, pretože*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -1,\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = 0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = 0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -2,$$

potom pre $\boldsymbol{h} = (h,k,l)$ *máme*

$$D^2 L_{(0,0,0)}(h,k,l) = 2h^2 - 2hk + 2k^2 - 2l^2 = h^2 + k^2 + (h-k)^2 - 2l^2,$$

čo je indefinitná kvadratická forma. Toto sme však nemuseli robiť. Extrémy na hranici sú viazané extrémy funkcie f *s väzbou* $g(x,y,z) = 3x^2 + 3y^2 + z^2 - 4 = 0$. *Zostrojíme Lagrangeovu funkciu*

$$L(x,y,z) = f(x,y,z) - \lambda g(x,y,z) = x^2 - xy + y^2 - z^2 - \lambda(3x^2 + 3y^2 + z^2 - 4),$$

odkiaľ:

$$gradL(x,y,z) = \nabla L(x,y,z) = \mathbf{0}$$

čo implikuje

$$2x - y - 6\lambda x = 0 \tag{(a)}$$

$$-x + 2y - 6\lambda y = 0 \tag{(b)}$$

$$-2z - 2\lambda z = 0 \tag{(c)}$$

$$3x^2 + 3y^2 + z^2 - 4 = 0 \tag{(d)}$$

Z (c) plynie alebo $z = 0$ *alebo* $\lambda = -1$. *Ak* $z = 0$, *potom* $y = (2-6\lambda)x$, $x = (2-6\lambda)y$ *teda* $x = 0 \Longrightarrow y = 0$, *potom* $y = (2-6\lambda)^2 y \Longrightarrow (2-6\lambda) = \pm 1 \Longrightarrow \lambda = \frac{1}{6}$ *alebo* $\lambda = \frac{1}{2}$. *Bod* $(0,0,0)$ *sa však nenachádza na elipsoide a preto pre hodnoty* $\lambda = \frac{1}{6}$ *a* $\lambda = \frac{1}{2}$ *dostávame, že* $y = x$ *alebo* $y = -x$.*Napokon dostaneme štyri body*

$$\left(\pm\frac{2}{\sqrt{6}}, \pm\frac{2}{\sqrt{6}}, 0\right), \left(\pm\frac{2}{\sqrt{6}}, \mp\frac{2}{\sqrt{6}}, 0\right)$$

a ak $\lambda = -1$ *dostaneme body* $(0,0,\pm 2)$. *Pre tieto body máme:*

$$f\left(\pm\frac{2}{\sqrt{6}}, \pm\frac{2}{\sqrt{6}}, 0\right) = \frac{2}{3},\ f\left(\pm\frac{2}{\sqrt{6}}, \mp\frac{2}{\sqrt{6}}, 0\right) = 2,\ f(0,0,\pm 2) = -4,$$

odkiaľ vidieť, že minimum -4 *sa nadobúda v bodoch* $(0,0,\pm 2)$ *a maximum* 2 *v bodoch* $\left(\pm\frac{2}{\sqrt{6}}, \pm\frac{2}{\sqrt{6}}, 0\right)$, $\left(\pm\frac{2}{\sqrt{6}}, \mp\frac{2}{\sqrt{6}}, 0\right)$. *Tento výsledok môžeme potvrdiť aj použitím kvadratickej formy (druhého diferenciálu)* $D^2 L_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{h})$.$\square$

Cvičenia.

1. Vypočítajte parciálne derivácie, gradient a diferenciál funkcie $f(x,y) = \frac{2}{(3x^2+4y^2)^2}$ v bode $\boldsymbol{a} = (-1,1)$. $\left[\begin{array}{c} \frac{\partial f}{\partial x}(-1,1) = \frac{24}{343},\ \frac{\partial f}{\partial y}(-1,1) = -\frac{32}{343},\ grad\, f(-1,1) = \left(\frac{24}{343}, -\frac{32}{343}\right), \\ Df(-1,1)(\boldsymbol{h}) = \frac{24}{343}h_1 - \frac{32}{343}h_2, \text{ kde } \ \boldsymbol{h} = (h_1,h_2) \end{array} \right]$

2. Vypočítajte $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ a $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}$ keď $f(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

   $\left[\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{2x^4+6x^2y^2}{(x^2+y^2)^2},\ \frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = 2,\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = \frac{4x^4y-12x^2y^3}{(x^2+y^2)^3},\ \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y \partial x} - \text{neexistuje}\right]$

3. Nech $f : \boldsymbol{R}^2 \longrightarrow \boldsymbol{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$. Vypočítajte $\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y}$.

   $\left[\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y \partial x} = 0,\ \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y} = 0\right]$

4. Vypočítajte deriváciu funkcie $f(x,y) = e^y \cos(x+y)$ v bode $\boldsymbol{a} = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ v smere vektora $\boldsymbol{e} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

   $\left[\frac{df}{d\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{a}) = f_{.\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{a}) = -\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{3}\right)\right]$

5. Nájdite deriváciu funkcie $f(x,y) = 3x^2 - 6xy + y^2$ v bode $\boldsymbol{a} = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right)$ v smere ľubovoľného jednotkového vektora $\mathbf{e}$. Zistite v akom smere je derivácia

   (a) nulová, $\left[\boldsymbol{e}_1 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ \boldsymbol{e}_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$

   (b) najväčšia, $\left[\boldsymbol{e}_3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$

   (c) najmenšia. $\left[\boldsymbol{e}_4 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$

V nasledujúcich príkladoch nájdite lokálne extrémy funkcií

1. $f(x,y) = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$. $\left[f(0,0) = 0\right.$ lokálne minimum, sedlové body $(1,4)$, $(1,-4)$, $\left(-\frac{5}{3}, 0\right.$

2. $f(x,y) = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$.

   $\left[f\left(\frac{1}{2}, -1\right) = -\frac{e}{2} \text{ lokálne minimum}\right]$

3. $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy + 2$.

   $[f(-1,-1) = 3$ lokálne maximum, sedlový bod $(0,0)]$

4. $f(x,y) = 5xy + \frac{25}{x} + \frac{8}{y}$, $x > 0$, $y > 0$.

   $\left[f\left(\frac{5}{2}, \frac{4}{5}\right) = 30 \text{ lokálne minimum}\right]$

5. $f(x,y) = \frac{1}{2}y + (47 - x - y)\left(\frac{x}{3} + \frac{y}{4}\right)$.

   $[f(21,20) = 282$ lokálne maximum$]$

6. $f(x,y) = xy(2-x-y)$.

   $\left[f\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{27}\right.$ lokálne maximum , sedlové body $(0,0)$, $(0,2)$, $\left.(2,0)\right]$

7. $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}\left(2y^2+x^2\right)$. $\left[f(0,0) = 0\right.$ lokálne minimum, $f(0,1) = \frac{2}{e}$, $f(0,-1) = \frac{2}{e}$ lokáln

8. $f(x,y) = x^2y^2(3-4x+6y)$.

   $\left[\right.$ $f\left(\frac{3}{10},-\frac{1}{5}\right) = \frac{27}{12400}$ lokálne maximum,
   v bodoch $\left\{(x,0): x > \frac{3}{4}\right\} \wedge \left\{(0,y): y < \frac{1}{2}\right\}$ sú lokálne maximá, pre ktoré $f(.,.) = 0$,
   v bodoch $\left\{(x,0): x < \frac{3}{4}\right\} \wedge \left\{(0,y): y > \frac{1}{2}\right\}$ sú lokálne minimá, pre ktoré $f(.,.) = 0$,
   sedlové body $\left(\frac{3}{4},0\right) a \left(0,\frac{1}{2}\right)$. $\left.\right]$

9. $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-xy+2z+x$.

   $\left[f\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-1\right) = -\frac{4}{3}\right.$ lokálne minimum$\left.\right]$

10. $f(x,y,z) = 3x^2+3x+2y^2+2yz+2y+2z^2-2z$.

    $\left[f\left(-\frac{1}{2},-1,1\right) = -\frac{11}{4}\right.$ lokálne minimum$\left.\right]$

11. $f(x,y,z) = 2x^2+y^2+2z-xy-xz$.

    $[(2,1,7)$ - sedlový bod$]$

12. $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2+2x+4y-6z$.

    $[f(-1,-2,3) = -14$ lokálne minimum$]$

13. $f(x,y,z) = y^2+2z^2+2x-xy-xz$.

    $\left[\left(\frac{8}{3},\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right)\right.$ - sedlový bod$\left.\right]$

14. $f(x,y,z) = x^3+y^2+z^2+12xy+2z$. $[f(24,-144,-1) = -6913$ lokálne minimum, $(0,0,-1)$ - sed

Integrálny počet funkcií viacerých premenných.

Integrovanie cez n-rozmerné kvádre.

V Matematickej analýze I sme pre po častiach spojitú funkciu funkciu $f : \langle a, b\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}$ zaviedli pojem Riemannovho integrálu obyčajne označovaného ako $\int_a^b f(x)\,dx$. Tento prístup rozšírime na funkcie viacerých premenných.

Analógiou intervalu z $\boldsymbol{R}$ je pojem pravouholníka (kvádra) v $\boldsymbol{R}^n$.

Definition 310 *n-dimenzionálnym intervalom (n-intervalom, n-rozmerným kvádrom) $E \in \boldsymbol{R}^n$ budeme nazývať kartézsky súčin n intervalov, t.j. ak $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, pričom $a_i < b_i$, $\forall i = 1, 2, \ldots, n$.*

$$E(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n; a_i \le x_i \le b_i, i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

V prípade, že $n = 1$ je to uzavrerý interval, ak $n = 2$ potom je to obdĺžnik, pre $n = 3$ kváder a vo všeobecnom prípade je to n-interval so stranami dĺžky $b_i - a_i$.

Intervaly majú dĺžku, obdĺžniky plochu, kvádre objemy. Aby sme tento pojem mohli pomenovať všeobecnou terminológiou zavedieme tzv. Jordanovský obsah alebo iba obsah (mieru) . Preto n-dimenzionálny obsah n-intervalu $E(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ definujeme

$$c(E) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i).$$

Remark 311 *Poznamenajme, že napríklad interval $\langle a, b\rangle$ môže byť považovaný aj za degenerovaný obdĺžnik $\langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$ s $c = d$. Jeho 1-dimenzionálny obsah je*

$$c(\langle a, b\rangle) = b - a,$$

ale 2-dimenzionálny obsah je

$$c(\langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle) = (b - a)(d - c) = 0.$$

Konečné zjednotenie n-intervalov E_i, $S = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$ sa nazýva neprekrývajúce, ak každé dva intervaly nemajú spoločné vnútorné body $int(E_i) \cap int(E_j) = \emptyset, i \neq j, i, j = 1, 2, \ldots, n$. Ak S je také konečné zjednotenie, tak

$$c(S) = \sum_{i=1}^{n} c(E_i).$$

Ak platí $S = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$ aj $S = \bigcup_{j=1}^{p} F_j$, potom $c(S)$ je taký istý pre obe konečné zjednotenia. Ak S_1, S_2 sú dve neprekrývajúce sa množiny (konečné zjednotenia), tak platí

$$c(S_1 \cup S_2) = c(S_1) + c(S_2).$$

Túto vlastnosť ihneď možno rozšíriť na každé konečné zjednotenie, je to tzv konečná aditívnosť obsahu.

Definícia Riemannovho integrálu reálnej funkcie definovanej na n-intervale je taká istá ako definícia integrálu reálnej funkcie na intervale. Hlavný rozdiel je v tom, že dĺžku intervalu zameníme za obsah n-intervalu.

Definition 312 *Delenie D intervalu $\langle a, b\rangle$ je konečná množina $\{x_0, x_1, \ldots, x_p\}$ taká, že $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_p = b$. Ak $E(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ je n-interval a D_i je delenie intervalu $\langle a_i, b_i\rangle$, potom $D = D_1 \times D_2 \times \cdots \times D_n$ je delenie n-intervalu E.*

Teda delenie rozdelí E do menších intervalov. Ak D_i delí $\langle a_i, b_i\rangle$ do p_i subintervalov, potom D delí E do $p_1 p_2 \ldots p_n$ podintervalov. Napríklad v $\boldsymbol{R}^2$ delením obdĺžnika dostaneme sieť. Hovoríme, že delenie D_2 (n-intervalu) je zjemnením delenia D_1 ak všetky n-intervaly z D_2 patria tiež do D_1.

Definition 313 *Nech D je delenie $E(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ do p n-intervalov E_i a nech $f : E(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \longrightarrow \boldsymbol{R}$ je ohraničená funkcia. Potom hornými a dolnými integrálnymi súčtami rozumieme*

$$H(f, D) = \sum_{i=1}^{p} M_i c(E_i),\ D(f, D) = \sum_{i=1}^{p} m_i c(E_i)$$

kde $M_i = \sup_{\boldsymbol{x} \in E_i} f(\boldsymbol{x})$ a $m_i = \inf_{\boldsymbol{x} \in E_i} f(\boldsymbol{x})$.

Je očividné, že pre každé delenie D máme

$$D(f, D) \leq H(f, D).$$

Ak $n = 1$ a $f > 0$, horné súčty aproximujú zhora plochu medzi grafom funkcie a osou a dolné súčty túto plochu aproximujú zdola. Podobná je interpretácia ak $f > 0$ je definovaná na nejakom obdĺžniku v $\boldsymbol{R}^2$. Potom horné súčty zhora a dolné súčty zdola aproximujú objem medzi rovinou $z = 0$ a „plochou“ $z = f(x, y)$.

Theorem 314 *Ak D' je zjemnením delenia D, potom*

$$D(f, D) \leq D(f, D') \quad a \quad H(f, D') \leq H(f, D).$$

Theorem 315 *Ak D a D' sú dve rôzne delenia, potom*

$$D(f, D) \leq H(f, D').$$

Definition 316 *Ohraničená funkcia $f : E(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \longrightarrow \boldsymbol{R}$ sa nazýva (riemannovsky) integrovateľná ak ku každému $\varepsilon > 0$ existuje delenie D_ε také, že*

$$H(f, D_\varepsilon) - D(f, D_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Táto podmienka je ekvivalentná s podmienkou, že

$$\sup\{D(f, D);\ D \text{ je delenie } E(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\} = \inf\{H(f, D');\ D' \text{ je delenie } E(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\} \tag{(1)}$$

Hodnota, ktorá vyhovuje (1) sa volá určitý integrál z funkcie f na $E(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ a označujeme ju $\int_E f(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}$, alebo $\int_E f(\boldsymbol{x})\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n$, alebo iba $\int_E f$.

Tak $I = \int_E f$ je jediné reálne číslo také, že

$$D(f, D) \leq I \leq H(f, D),\ \forall D.$$

Example 317 *Funkcia $f : E(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \longrightarrow \boldsymbol{R}$, $f(\boldsymbol{x}) = k$ je integrovateľná funkcia.*

Solution 318 *Platí*

$$D(f,D) = kc(E) = H(f,D).$$

Odtiaľ dostávame $\int_E f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} = kc(E)$.□

Theorem 319 *(Veta o vlastnostiach integrálu) Nech* f, g *sú integrovateľné funkcie na* $E(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ *a nech* $k \in \boldsymbol{R}$. *Potom platí*

1) $kf+g$ *je integrovateľná a platí* $\int_E kf+g = k\int_E f + \int_E g$ *(Lineárnosť).*

2) Ak $f(\boldsymbol{x}) \geq 0$, *pre každé* $\boldsymbol{x} \in E(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$, *potom* $\int_E f \geq 0$; *ak* $f(\boldsymbol{x}) \geq g(\boldsymbol{x})$, *pre každé* $\boldsymbol{x} \in E(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$, *potom* $\int_E f \geq \int_E g$.

3) Ak $m \leq f(\boldsymbol{x}) \leq M$, *pre každé* $\boldsymbol{x} \in E(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$, *potom* $mc(E) \leq \int_E f \leq Mc(E)$.

4) Ak f *je integrovateľná, potom aj* $|f|$ *je integrovateľná a platí* $\left|\int_E f\right| \leq \int_E |f|$.

Existujú veľké triedy integrovateľnych funkcií, napríklad - spojité funkcie. My chceme nájsť nutné a postačujúce podmienky integrovateľnosti.

Example 320 *Funkcia*

$$f : \langle 0,1\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R},\ f(x) = \begin{cases} 1 & pre \quad x \text{ iracionálne} \\ 0 & pre \quad x \text{ racionálne} \end{cases},$$

nie je riemannovsky integrovateľná.

Solution 321 *Každý horný súčet* $H(f,D) = 1$ *a každý dolný súčet* $D(f,D) = 0$, *pretože každý interval vždy obsahuje racionálne aj iracionálne číslo. Funkcia* f *je nespojitá v každom bode z* $\langle 0,1\rangle$.□

Nutná a postačujúca podmienka integrovateľnosti.

Teraz budeme skúmať množiny bodov nespojitosti funkcie.

Definition 322 *Oscilácia ohraničenej funkcie* $f : S\,(\subset \boldsymbol{R}^n) \longrightarrow \boldsymbol{R}$ *na* S *je definovaná*

$$oscf(S) = \sup_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in S} \{f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})\}.$$

Pre osciláciu platí

$$oscf(S) = \sup_{\boldsymbol{x} \in S} \{f(x)\} - \inf_{\boldsymbol{y} \in S} \{f(\boldsymbol{y})\},$$

ľahko si možno overiť, že

$$oscf(S_1) \leq oscf(S_2) \text{ ak } \quad S_1 \subseteq S_2.$$

Definition 323 *Osciláciou* f *v bode* $\boldsymbol{x} \in S$ *budeme rozumieť číslo*

$$\omega_{f(\boldsymbol{x})} = \inf\{oscf(O_\delta(\boldsymbol{x}) \cap S); \delta > 0\} = \lim_{\delta \longrightarrow 0^+} oscf\,(O_\delta(x) \cap S).$$

Funkcia $oscf(O_\delta(x) \cap S)$ je klesajúca funkcia premennej δ.

Theorem 324 *Ohraničená funkcia* $f : S\,(\subset \boldsymbol{R}^n) \longrightarrow \boldsymbol{R}$ *je spojitá v bode* $\boldsymbol{a} \in S$ *vtedy a len vtedy ak* $\omega_{f(\boldsymbol{a})} = 0$.

Označme $D = \left\{\boldsymbol{x} \in E; \omega_{f(\boldsymbol{x})} > 0\right\}$ množinu bodov nespojitosti funkcie f na n-intervale E. Vieme, že f je integrovateľná, ak existuje delenie D n-kvádra E také, že rozdiel

$$H\,(f,D) - D\,(f,D) = \sum_{i=1}^{p}(M_i - m_i)c(E_i)$$

sa dá urobiť dostatočne malý. Na n-intervaloch E_i, kde je funkcia f spojitá možno výraz $M_i - m_i = osc f(E_i)$ urobiť dostatočne malý. A pretože predpokladáme, že funkcia f je ohraničená, tak aj celú sumu možno urobiť malou.

Definition 325 *Nech* $A \subset \boldsymbol{R}^n$ *je ohraničená množina. Hovoríme, že* A *má n-dimenzionálny Jordanovský obsah nula, ak* $\forall\varepsilon > 0$ *existuje konečné pokrytie množiny* A *pomocou n-intervalov* $\{E_k;\ k = 1, 2, \ldots, q\}$ *(t.j.* $A \subset \bigcup_{i=1}^{q} E_i$*) tak, že*

$$\sum_{i=1}^{q} c(E_i) < \varepsilon.$$

Hovoríme, že A *má n-dimenzionálnu Lebesquovu mieru nula, ak* $\forall\varepsilon > 0$ *existuje spočítateľné pokrytie množiny* A *pomocou systému n-intervalov* $\{E_i;\ i = 1, 2, \ldots,\}$ *(t.j.* $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$*) tak, že*

$$\sum_{i=1}^{\infty} c(E_i) < \varepsilon.$$

Remark 326 *Ak* $A \subset \boldsymbol{R}^n$ *má Jordanovský obsah nula, tak má aj Lebesquovu mieru nula, ale opačné tvrdenie neplatí. Pre kompaktné množiny je množina s obsahom nula a množina s mierou nula to isté.*

Poznamenajme, že úsečka v $\boldsymbol{R}^2$ má dvojdimenzionálnu mieru 0, aj keď jej jednodimenzionálna miera (dĺžka) je nenulová. Je to preto, že úsečku môžeme pokryť obdĺžnikmi s konečnou dĺžkou a s veľmi malou šírkou.

Example 327 *Nech* $f : \langle a, b\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}$ *je spojitá. Potom jej graf* $G = \left\{(x, f\,(x)) \in \boldsymbol{R}^2; x \in \langle a, b\rangle\right\}$ *má dvojdimenzionálny obsah 0.*

Solution 328 *Nech* $\varepsilon > 0$ *je ľubovoľné. Pretože* f *je aj rovnomerne spojitá na* $\langle a, b\rangle$.

$$\forall\varepsilon > 0\,\exists\delta > 0;\ |x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Nech $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$ *je delenie* $\langle a, b\rangle$ *na intervaly dĺžky* $\delta_1 < \delta$. *Obdĺžniky*

$$\{\langle x_j, x_{j+1}\rangle \times \langle f\,(x_j) - \varepsilon, f\,(x_{j+1}) + \varepsilon\rangle\,; 0 \le j \le m-1\}$$

obsahujú graf f *podľa rovnomernej spojitosti a ich celková plocha je* $2m\delta_1\varepsilon = 2\varepsilon(b - a)$.$\square$

Rozdiel medzi mierou nula a obsahom nula ukážeme v nasledujúcom príklade.

Example 329 *Množina* $\boldsymbol{Q} \cap (0,1)$ *má Lebesquovu mieru nula, ale nemá nulový Jordanovský obsah.*

Solution 330 *Racionálne čísla z intervalu* $(0,1)$ *sa dajú označiť ako postupnosť* $\{r_1, r_2, \ldots, \}$ *. Potom pre* $\varepsilon > 0$ *je systém uzavretých intervalov*

$$\left\{ \left\langle r_i - \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}, r_i + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} \right\rangle, i = 1, 2, \ldots \right\}$$

je spočítateľným pokrytím $\boldsymbol{Q} \cap (0,1)$ *s dĺžkou* $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon$*. Aby sme ukázali, že* $\boldsymbol{Q} \cap (0,1)$ *nemá nulový Jordanovský obsah, musíme si uvedomiť, že ak konečné zjednotenie uzavretých intervalov pokrýva množinu* $\boldsymbol{Q} \cap (0,1)$ *, potom toto zjednotenie musí pokrývať aj celý interval* $(0,1)$ *.Ak by nejaký bod* $x \in (0,1)$ *nepatril do konečného zjednotenia uzavretých intervalov, potom by existovalo okolie bodu* x $O(x)$ *také, že toto okolie má s konečným zjednotením prázdny prienik. Ale každé okolie* $O(x)$ *obsahuje aj racionálne čísla z intervalu* $(0,1)$ *. To je v spore s vlastnosťou konečného pokrytia, potom by však Jordanovský obsah musel byť menší ako* 1. $\square$

Theorem 331 *Ak* $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je postupnosť množín, každá s Lebesquovou mierou nula, potom aj* $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ *má tiež Lebesquovu mieru nula.*

Chceme ukázať, že funkcia f je riemannovsky integrovateľná vtedy a len vtedy ak množina

$$D = \left\{ \boldsymbol{x} \in E;\, \omega_{f(\boldsymbol{x})} > 0 \right\}$$

má Lebesquovu mieru nula. Označme

$$D_\varepsilon = \left\{ \boldsymbol{x} \in E;\, \omega_{f(\boldsymbol{x})} \geq \varepsilon \right\}$$

a ukážeme, že D_ε je ohraničená a uzavretá množina a ako sme už poznamenali, pre takéto množiny je pojem množina s Jordanovým obsahom nula ten istý, ako pojem množina s Lebesquovou mierou nula.

Theorem 332 D_ε *je uzavretá množina.*

Tento výsledok ukazuje, že D_ε je kompaktná (uzavretá a ohraničená) podmnožina intervalu $E(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$.

Teraz ukážeme, že ak je oscilácia funkcie malá v každom bode n-intervalu $E(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, potom je oscilácia dostatočne malá aj na dostatočne malom podintervale.

Theorem 333 *Nech* $E(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ *je uzavretý* n*-interval a nech platí* $\omega_{f(\boldsymbol{x})} < \varepsilon$*, pre každé* $\boldsymbol{x} \in E(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ *. Potom existuje delenie* P *kvádra* E *na podkvádre* E_k *také, že* $osc f(E_k) < \varepsilon$*.*

Teraz budeme charakterizovať riemannovsky integrovateľné funkcie.

Theorem 334 *(Nutná a postačujúca podmienka integrovateľnosti) Nech $f : E(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \longrightarrow \boldsymbol{R}$ je ohraničená funkcia. Potom f je riemannovsky integrovateľná na E vtedy a len vtedy ak množina bodov nespojitosti D funkcie f má Lebesquovu mieru nula.*

Tento výsledok napríklad ukazuje, že spojitá funkcia, ako aj funkcia spojitá s výnimkou konečného počtu bodov sú integrovateľné.

Remark 335 *Ak $f : E(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \longrightarrow \boldsymbol{R}$ je riemannovsky integrovateľná funkcia, potom $\int_E f$ možno dobre aproximovať tzv. riemannovými integrálnymi súčtami*

$$R(f, D) = \sum_{i=1}^{n} f(\boldsymbol{x}_i) c(E_i),$$

pričom $\boldsymbol{x}_i \in E_i$. Platí $M_i \leq f(\boldsymbol{x}_i) \leq M_i$ odkiaľ $D(f, D) \leq R(f, D) \leq H(f, D)$ a teda

$$\int_E f \approx \sum_{i=1}^{n} f(\boldsymbol{x}_i) c(E_i).$$

Viacrozmerné integrály ako iterované integrály.

Teraz budeme uvažovať o metóde výpočtu integrálov na n-intervaloch. Budeme sa koncentrovať na dvojné integrály (integrály v $\boldsymbol{R}^2$), pretože to ilustruje všeobecnú metódu. Uvažujme teda $E = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$. Ak $f : E\left(\subset \boldsymbol{R}^2\right) \longrightarrow \boldsymbol{R}$ je integrovateľná na E, potom jej integrál napíšeme v tvare $\int_E f$ alebo $\int_E f(x, y)\, dxdy$. Dôvod pre druhé označenie sa stane zrejmým, ak sa naučíme počítať tieto integrály.

Ak y je pevné píšeme $f(., y)$ pre tie funkcie, ktorých hodnoty sú v bode x rovné $f(x, y)$ t.j. $x \longmapsto f(x, y)$. Podobne pre $f(x, .)$.

Pre obdĺžnik $E = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$ nech $\langle a, b\rangle$ je delené na podintervaly $\{I_r;\, 1 \leq r \leq p\}$ a nech $\langle c, d\rangle$ sa delí na podintervaly $\{J_s;\, 1 \leq s \leq q\}$ a nech P je odpovedajúce delenie E na obdĺžniky $E_{rs} = I_r \times J_s$. Označme dĺžku intervalu I ako $l(I)$. Potom plocha (obsah) E_{rs} je $l(I_r)l(J_s)$. Ak $f : E \longrightarrow \boldsymbol{R}$ je integrovateľná na E, existuje delenie P také, že integrál sa dá dobre aproximovať sumou (táto je známa ako riemannov integrálny súčet)

$$\sum_{r=1}^{p} \sum_{s=1}^{q} f(x_r, y_s) l(I_r) l(J_s)$$

čo môžeme písať ako

$$\sum_{s=1}^{q} l(J_s) \left(\sum_{r=1}^{p} f(x_r, y_s) l(I_r) \right) = \sum_{r=1}^{p} l(I_r) \left(\sum_{s=1}^{q} f(x_r, y_s) l(J_s) \right) \qquad ((1))$$

Prvá odpovedá vyjadreniu sumy cez všetky obdĺžniky najprv sumované cez horizontálnu čiaru $y = y_1$, potom cez $y = y_2, \ldots$. Druhé vyjadrenie je cez x-y. Ak sa sústredíme na prvý výraz v (1), tak $\sum_{r=1}^{p} f(x_r, y_s) l(I_r)$ aproximuje $\int_a^b f(x, y_s)\, dx$. Ak napíšeme

$$G(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx$$

potom ľavá strana (1) je aproximáciou integrálu

$$\int_c^d G(y)\,dy.$$

Podobne pre pravú stranu. Očakávame, že bude platiť.

$$\int_E f = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right) dx \tag{(2)}$$

(2) nám ukazuje, že dvojný integrál možno počítať ako iterovaný dvojnásobný integrál. Niekedy sa zvykne písať

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx \quad \text{namiesto} \quad \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right) dy.$$

Iterované integrály môžeme vypočítať pomocou elementárneho integrálneho počtu funkcií jednej premennej. Ale ak $\int_E f$ existuje, potom ešte (2) nemusí platiť. Skutočne, najjednoduchší príklad je, keď f je spojitá s výnimkou čiary $y = c, a \le x \le b$. Táto množina má dvojdimenzionálnu mieru nula, teda $\int_E f$ existuje, ale $\int_a^b f(x,y)\,dx$ neexistuje, pretože funkcia $f(.,c)$ je nespojitá na množine (jednodimenzionálnej) kladnej miery. Samozrejme, že také niečo sa nemôže stať, ak je funkcia f spojitá na E. Dokázať možno ale viac:

Theorem 336 *(Fubiniho veta pre n-intervaly) Nech f je riemannovsky integrovateľná na $E = \langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle$ a predpokladajme, že pre každé pevné $x \in \langle a,b\rangle$ je funkcia $f(x,.)$ riemannovsky integrovateľná na $\langle c,d\rangle$. Potom*

$$\int_E f = \int_a^b F(x)\,dx, \quad \textit{kde} \quad F(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy,$$

podobne ak f a $f(.,y)$ sú integrovateľné, tak

$$\int_E f = \int_c^d G(y)dy, \quad \textit{kde} \quad G(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx.$$

Dá sa overiť, že (2) platí, ak f má najviac konečne mnoho bodov nespojitosti v E. Avšak (2) platí ak množina bodov nespojitosti funkcie f a množina bodov nespojitosti $f(x,.)$ (a $f(.,y)$) má jednodimenzionálnu mieru nula.

Theorem 337 *Nech f je riemannovsky integrovateľná na $E = \langle a_1,b_1\rangle \times \langle a_2,b_2\rangle \times \langle a_3,b_3\rangle$ a predpokladajme, že pre každé pevné z je funkcia $f(.,.,z)$ riemannovsky integrovateľná na $E_{12} = \langle a_1,b_1\rangle \times \langle a_2,b_2\rangle$ .Potom*

$$\int_E f = \int_{a_3}^{b_3} dz \int_{E_{12}} f(x,y,z)dxdy, \tag{(3)}$$

podobne ak $\forall(x,y)$ je funkcia $f(x,y,.)$ integrovateľná, tak

$$\int_E f = \int_{E_{12}} dxdy \int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)dz. \tag{(4)}$$

Kombináciou (3) a (4) dostaneme

$$\int\int\int_{E(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})} f = \int_{a_3}^{b_3} dz \int_{a_2}^{b_2} dy \int_{a_1}^{b_1} f(x,y,z)dx$$

a tieto integrály sa môžu brať aj v inom poradí, v závislosti od toho, či existujú.

Example 338 *Vypočítajte* $\int\int_E x\sin y dxdy$, *ak* $E = \langle 0,1\rangle \times \left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle$.

Solution 339 $\int\int_E x\sin y dxdy = \int_0^1 xdx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin y dy = \frac{1}{2}$. $\square$

Integrály na všeobecnejších množinách.
Nech $A \subseteq \boldsymbol{R}^n$ je ohraničená množina. Pre danú funkciu $f : A \longrightarrow \boldsymbol{R}$ a interval E obsahujúci A ($A \subset E$) definujeme funkciu $f_A : E \longrightarrow \boldsymbol{R}$ tak, že

$$f_A(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} f(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x} \in A \\ 0, & \boldsymbol{x} \notin A \end{cases}.$$

f_A je rozšírenie f z A na E nulou.

Definition 340 *Ohraničená funkcia* $f : A \longrightarrow \boldsymbol{R}$ *sa nazýva riemanovsky integrovateľná na množine* A, *ak existuje kváder* E, $A \subseteq E$ *taký, že* $\int_E f_A$ *existuje.*

Ľahko vidieť, že ak uvažujeme aproximujúce sumy, tak táto definícia je nezávislá od výberu kvádra E. Teda v definícii integrálu môžme vynechať E a písať $\int_A f$.

Nech $A \subseteq \boldsymbol{R}^n$. Potom

$$\chi_A : \boldsymbol{R}^n \longrightarrow \boldsymbol{R}, \chi_A(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, & \boldsymbol{x} \in A \\ 0, & \boldsymbol{x} \notin A \end{cases}.$$

Potom $f_A(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})\chi_A(\boldsymbol{x})$ a že f je integrovateľná na A vtedy a len vtedy ak je $f\chi_A$ integrovateľná na E a platí

$$\int_A f = \int_E f\chi_A.$$

Definition 341 *Hovoríme, že ohraničená množina* A *je Jordanovsky merateľná ak je funkcia* χ_A *integrovateľná a potom definujeme obsah* A, *t.j.* $c(A)$ *ako*

$$c(A) = \int_A 1 = \int_E \chi_A.$$

Pre množiny v $\boldsymbol{R}$ obsah je dĺžka intervalu, v $\boldsymbol{R}^2$ obsah je veľkosť plochy a v $\boldsymbol{R}^3$ obsah je veľkosť objemu.

Pretože ∂A je množina bodov nespojitosti funkcie χ_A vidíme, že A je Jordanovsky merateľná vtedy a len vtedy ak ∂A má Lebesquovu mieru nula.

Theorem 342 *Množina* A *má obsah nula podľa predchádzajúcej* **??** *vtedy a len vtedy ak* A *má obsah nula podľa* **??** .

Ako sme už poznamenali množina s obsahom nula a množina s mierou nula sú rôzne pojmy, aj keď sú totožné pre kompaktné množiny. Teda ak A je ohraničená množina, A je Jordanovsky merateľná vtedy a len vtedy ak $c(\partial A) = 0$, pretože ∂A je uzavretá. Vieme, že $\boldsymbol{Q} \cap \langle 0, 1\rangle$ má mieru nula, pretože je to spočítateľná množina, ale nie je Jordanovsky merateľná, pretože $\chi_{\mathbf{Q}\cap\langle 0,1\rangle}$ nie je integrovateľná (je nespojitá v každom bode z $\langle 0, 1\rangle$), jej hranica je celé $\langle 0, 1\rangle$.

Ľahko vidíme, že ak E_1, E_2 majú obsah nula, potom aj $E_1 \cup E_2$ má obsah nula a ak $F \subseteq E$ a $c(E) = 0$, tak aj $c(F) = 0$.

Theorem 343 *Nech A je ohraničená a Jordanovsky merateľná a nech $f : A \longrightarrow \boldsymbol{R}$ je ohraničená. Potom f je integrovateľná na A vtedy a len vtedy ak D_A- množina bodov nespojitosti funkcie f na množine A má mieru nula.*

Teraz chceme ukázať, že množiny s obsahom nula sú zanedbateľné pri riemannovom integrále.

Theorem 344 *Nech N je množina s Jordanovým obsahom nula a $f : N \longrightarrow \boldsymbol{R}$ je ohraničená funkcia. Potom f je integrovateľná na N a platí $\int_N f = 0$.*

Theorem 345 *(Veta o rovnosti integrálov pre funkcie, ktoré sa líšia na množine s obsahom nula.) Nech $f, g : A\,(\subset \boldsymbol{R}^n) \longrightarrow \boldsymbol{R}$ sú ohraničené funkcie a nech f je integrovateľná na A a taká, že $f(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x})$ s výnimkou množiny N s obsahom nula. Potom g je integrovateľná na A a platí $\int_A g = \int_A f$.*

Veta je nepravdivá ak nahradíme „obsah nula“ „mierou nula“ ako môžeme vidieť ak vezmeme $f(x) = 1$ pre $x \in \langle 0, 1\rangle$ a

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \in \boldsymbol{Q} \cap \langle 0, 1\rangle \\ 1, & x \in \langle 0, 1\rangle \setminus \boldsymbol{Q} \end{cases} .$$

Ukázali sme, že g nie je riemannovsky integrovateľná a líši sa od f iba na množine miery nula. Toto je nedostatok riemannovho integrálu.

Je dôležité pri výpočte, aby sme boli schopní vyrobiť dekompozíciu integračného priestoru do malých kúskov.

Theorem 346 *Nech A, A_1, A_2 sú Jordanovsky merateľné množiny. Nech f je integrovateľná na $A = A_1 \cup A_2$, kde $c(A_1 \cap A_2) = 0$. Potom f je integrovateľná na A_1 a A_2 a platí*

$$\int_A f = \int_{A_1} f + \int_{A_2} f.$$

To isté platí, ak je f daná ako integrovateľná na A_1 aj A_2.

Theorem 347 *Nech A je Jordanovsky merateľná a nech S je Jordanovsky merateľná podmnožina A. Potom ak f je integrovateľná na A, máme*

$$\int_A f = \int_{A\setminus S} f + \int_S f.$$

Theorem 348 *(Veta o strednej hodnote.) Nech* $f : A \longrightarrow \boldsymbol{R}$, *je integrovateľná na Jordanovsky merateľnej množine* A *a nech* $m = \inf_{\boldsymbol{x}\in A} f(\boldsymbol{x}), M = \sup_{\boldsymbol{x}\in A} f(\boldsymbol{x})$. *Potom existuje* $\alpha \in \boldsymbol{R}$ *také, že* $m \leq \alpha \leq M$, *pričom*

$$\int_A f = \alpha c(A).$$

Ak okrem toho f *je spojitá na súvislej množine* A, *tak* $\alpha = f(\boldsymbol{a})$ *pre nejaké* $\boldsymbol{a} \in A$.

Výpočet integrálov.

Budeme sa koncentrovať na dvojné integrály, pretože tento prípad nám vysvetlí všeobecnú metódu.

Definition 349 *a) Nech* α, β *sú spojité reálne funkcie* $\alpha, \beta : \langle a, b\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}$ *a nech* $\forall x \in \langle a, b\rangle$ *je* $\alpha(x) \leq \beta(x)$.*Množinu* $A = \{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2; a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$ *nazývame elementárna oblasť typu* $[x, y]$.

b) Nech γ, δ *sú spojité reálne funkcie* $\gamma, \delta : \langle c, d\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}$ *a nech* $\forall y \in \langle c, d\rangle$ *je* $\gamma(y) \leq \delta(y)$. *Množinu* $A = \{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2;\ c \leq y \leq d, \gamma(y) \leq x \leq \delta(y)\}$ *nazývame elementárna oblasť typu* $[y, x]$.

Theorem 350 *Nech* A *je elementárna oblasť typu* $[x, y]$ *(*$[y, x]$*). Predpokladajme, že* $f : A \longrightarrow \boldsymbol{R}$ *je ohraničená a spojitá s výnimkou (najviac) hranice* A *a pre najviac konečný počet bodov z vnútra* A. *Potom*

$$\int_A f = \iint_A f(x, y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y)dy\right) dx$$

$$\left[\int_A f = \iint_A f(x, y)dxdy = \int_c^d \left(\int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x, y)dx\right) dy\right].$$

Example 351 *Nech* A *je trojuholník ohraničený čiarami* $y = 0, x = 1, y = x$. *Vypočítajte* $\iint_A e^{x^2} dxdy$.

Solution 352 *Najskôr popíšeme elementárnu oblasť* A *ako oblasť typu* $[y, x]$ *. Máme:* $A : 0 \leq y \leq 1,\ y \leq x \leq 1$

$$\iint_A e^{x^2} dxdy = \int_0^1 \left(\int_y^1 e^{x^2} dx\right) dy.$$

Takto však integrál nevieme vypočítať. Ale ak budeme integrovať v opačnom poradí t.j. A *popíšeme ako elementárnu oblasť typu* $[x, y] : A : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x$ *tak dostaneme:*

$$\iint_A e^{x^2} dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^x e^{x^2} dy\right) dx = \int_0^1 \left(\left[ye^{x^2}\right]_0^x\right) dx = \int_0^1 xe^{x^2} dx =$$

$$= \left| \begin{array}{cc} t = x^2 & dt = 2xdx \\ x = 0 \Longrightarrow t = 0 & x = 1 \Longrightarrow t = 1 \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int_0^1 e^t dt = \frac{e-1}{2}.\square$$

Podobným spôsobom ako pre prípad dvoch premenných by sme dokázali vetu pre výpočet trojných a viacnásobných integrálov na elementárnych oblastiach.

Definition 353 *Nech A je elementárna oblasť typu $[x,y]$ ($[y,x]$), nech g,h sú spojité funkcie $g,h : A \longrightarrow \boldsymbol{R}$ a nech $\forall (x,y) \in A$ je $g(x,y) \le h(x,y)$. Množinu $B \subset \boldsymbol{R}^3$;*

$$B = \left\{(x,y,z) \in \boldsymbol{R}^3;\ (x,y) \in A, g(x,y) \le z \le h(x,y)\right\}$$

nazývame elementárna oblasť typu $[x,y,z]$ ($[y,x,z]$). Analogicky definujeme elementárne oblasti typu $[x,z,y]$, $[y,z,x]$, ...

Theorem 354 *Nech $B \subset \boldsymbol{R}^3$ je elementárna oblasť typu $[x,y,z]$. Predpokladajme, že $f : B \longrightarrow \boldsymbol{R}$ je ohraničená a spojitá s výnimkou (najviac) hranice množiny B a pre najviac konečný počet bodov z vnútra B. Potom*

$$\int_B f = \iiint_B f(x,y,z)dxdydz = \iint_A \left(\int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x,y,z)dz\right) dxdy$$

Example 355 *Nech A je štvorsten $A = \left\{(x,y,z) \in \boldsymbol{R}^3;\ x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0, z \le 1-x-y\right\}$. Vypočítajte $\iiint_A (1-x)\, yzdxdydz$.*

Solution 356 *Najskôr si zapíšeme A ako elementárnu oblasť typu $[x,y,z]$ pomocou nerovností:*

$$A : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1-x, 0 \le z \le 1-x-y,$$

potom máme

$$\iiint_A (1-x)\, yzdxdydz = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left[\int_0^{1-x-y} (1-x)\, yzdz\right] dy\right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (1-x)\, y \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{1-x-y} dy\right) dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (1-x)\, y\, (1-x-y)^2\, dy\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x) \left(\int_0^{1-x} y\, (1-x-y)^2\, dy\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x) \left(\left[(1-x)^2 \frac{y^2}{2} - 2\,(1-x)\,\frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{4}\right]_0^{1-x}\right) dx = \frac{1}{24}\int_0^1 (1-x)^5\, dx = \frac{1}{144}.\square$$

Example 357 *Nech $A = \left\{(x,y,z) \in \boldsymbol{R}^3;\ \sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{2-x^2-y^2}\right\}$. Vypočítajte $\iiint_A zdxdydz$.*

Solution 358 *Najskôr zapíšeme A ako elementárnu oblasť pomocou nerovností:*

$$A : -1 \le x \le 1, -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2}, \sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{2-x^2-y^2},$$

potom máme

$$\iiint_A zdxdydz = \int_{-1}^1 \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left[\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} zdz\right] dy\right) dx =$$

$$= \int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\left[\frac{z^2}{2}\right]_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} dy\right)dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 2\left(1-x^2-y^2\right)dy\right)dx =$$

$$= \int_{-1}^{1}\left[\left(1-x^2\right)y - \frac{y^3}{3}\right]_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{4}{3}\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}dx =$$

$$= \left| \begin{array}{cc} x=\sin u & dx=\cos u du \\ x=-1 \Longrightarrow u=-\frac{\pi}{2} & x=1 \Longrightarrow u=\frac{\pi}{2} \end{array}\right| = \frac{4}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 u du = \frac{\pi}{2}.\square$$

Zámena premenných v n-rozmerných integráloch.

Vieme, že ak $g : \langle\alpha,\beta\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}$ je triedy C^1 a ak f je spojitá na $g\left(\langle\alpha,\beta\rangle\right)$ potom platí

$$\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta}(f\circ g)(t)g'(t)dt \tag{(1)}$$

Chceme formulovať podobnú vetu pre n-rozmerné integrály.

Theorem 359 *Nech $\Omega \subseteq \boldsymbol{R}^n$ je ohraničená. Nech $\boldsymbol{g} \in C^1(\Omega,\boldsymbol{R}^n)$ je injektívna na Ω a nech $J_{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{x}) \neq 0, \forall \boldsymbol{x} \in \Omega$. Nech $f : \boldsymbol{g}(\Omega) \longrightarrow \boldsymbol{R}$ je spojitá funkcia. Potom pre každú Jordanovsky merateľnú $A \subset \Omega$ platí*

$$\int_{\boldsymbol{g}(A)} f = \int_A f\circ \boldsymbol{g}\,|J_{\boldsymbol{g}}| \tag{(2)}$$

Túto vetu nebudeme dokazovať.

Symbol $J_{\boldsymbol{g}}$ znamená jacobián funkcie $\boldsymbol{g}$ ktorý sme definovali v **??** .

Fakt, že sa v (1) objavila $|.|$ súvisí s tým, že integrály v $\boldsymbol{R}^n$ nie sú orientované. V (1) ak $g' > 0$ na $\langle\alpha,\beta\rangle$, potom $g(\beta) > g(\alpha)$, zatiaľ čo ak $g' < 0$ máme $g(\beta) < g(\alpha)$, čo môžeme zapísať v tvare

$$\int_{g(\langle\alpha,\beta\rangle)} f = \int_{\alpha}^{\beta}(f\circ g)(t)\,|g'(t)|\,dt, \quad \text{kde} \quad \langle a,b\rangle = g\left(\langle\alpha,\beta\rangle\right).$$

Myšlienka dôkazu vety je nasledujúca: $\int_{\boldsymbol{g}(A)} f$ sa dá aproximovať sumou:

$$\sum_{i=1}^{m} f\left(\boldsymbol{x}^{(i)}\right)c(D_i), \quad \text{kde} \quad D_i \quad \text{je delenie} \quad \boldsymbol{g}(A),$$

čo sa dá napísať v tvare

$$\sum_{i=1}^{m} f\left(\boldsymbol{g}\left(\boldsymbol{y}^{(i)}\right)\right)c\left(\boldsymbol{g}\left(A_i\right)\right), \quad \text{kde} \quad A_i \quad \text{je delenie} \quad A.$$

Dá sa ukázať (dosť komplikovane), že

$$c\left(\boldsymbol{g}\left(A_i\right)\right) \approx \left|J_{\boldsymbol{g}}\left(\boldsymbol{y}^{(i)}\right)\right| c\left(A_i\right)$$

pre dostatočne malé delenie. Potom

$$\sum_{i=1}^{m} f\left(\boldsymbol{g}\left(\boldsymbol{y}^{(i)}\right)\right) c\left(\boldsymbol{g}\left(A_i\right)\right) \approx \sum_{i=1}^{m} f\left(\boldsymbol{g}\left(\boldsymbol{y}^{(i)}\right)\right) \left|J_{\boldsymbol{g}}\left(\boldsymbol{y}^{(i)}\right)\right| c\left(A_i\right)$$

čo aproximuje $\int_A f \circ \boldsymbol{g} \left|J_{\boldsymbol{g}}\right|$. Pri aplikáciách **??** je dôležité zoslabenie predpokladov. Pretože množiny obsahu nula sú zanedbateľné čo sa týka riemannovho integrálu, je možné predpoklady na $J_{\boldsymbol{g}}$ zoslabiť tak, že tento môže byť nulový na množine obsahu nula.

Example 360 *Vhodnou zámenou premenných vypočítajte $\int_D xydxdy$, kde D je oblasť v prvom kvadrante ohraničená krivkami $xy = 1, xy = 2, y = x, y = 4x$.*

Solution 361 *Ak položíme $u = xy, v = \frac{y}{x}$, tak D je obraz obdĺžnika*

$$R = \left\{(u, v) \in \boldsymbol{R}^2;\ 1 \le u \le 2, 1 \le v \le 4\right\}.$$

Potom

$$\iint_D xydxdy = \iint_R u\left|J\right| dudv, \quad kde \quad J = \left|\frac{\partial\left(x, y\right)}{\partial\left(u, v\right)}\right|.$$

Je však oveľa ľahšie vypočítať

$$\left|J^{-1}\right| = \left|\frac{\partial\left(u, v\right)}{\partial\left(x, y\right)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = \frac{2y}{x} = 2v,$$

potom

$$J = \frac{1}{2v}$$

a platí

$$\iint_D xydxdy = \iint_R u\frac{1}{2v}dudv = \frac{1}{2}\int_1^2 udu \int_1^4 \frac{1}{v}dv = \frac{3}{2}\ln 2.\square$$

Teraz budeme skúmať tri dôležité zámeny súradníc: použitie polárnych súradníc v $\boldsymbol{R}^2$ a cylindrických a sférických súradníc v $\boldsymbol{R}^3$.

a) Polárne súradnice: pre bod $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$ môžme písať

$$x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, \quad \text{kde} \quad r^2 = x^2 + y^2 \quad \text{a} \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}, x \neq 0.$$

Pre dané x, y máme $r \ge 0, 0 \le \varphi \le 2\pi$ alebo $-\pi \le \varphi \le \pi$. Pre bod $(x, y) = (0, 0)$ φ nemôže byť určené. Ak uvažujeme funkciu

$$\boldsymbol{g} : \boldsymbol{R}^2 \longrightarrow \boldsymbol{R}^2, \boldsymbol{g}\left(r, \varphi\right) = \left(r\cos\varphi, r\sin\varphi\right) = \left(x, y\right),$$

táto zobrazuje obdĺžnik $K = \left\{\left(r, \varphi\right); 0 \le r \le a, 0 \le \varphi \le 2\pi\right\}$ na kruh so stredom v začiatku súradnicovej sústavy a polomerom a, pričom platí

$$J_{\boldsymbol{g}} = \left|\frac{\partial\left(x, y\right)}{\partial\left(r, \varphi\right)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r \neq 0$$

pre $r \neq 0$. Teda verziu vety o zámene premenných ktorú sme formulovali vo **??** musíme oslabiť a uvažujeme vetu podľa ktorej $J_{\boldsymbol{g}}$ môže byť nulový na množine s obsahom nula.

Ak chceme vypočítať

$$\int_D f(x,y)\,dxdy, \quad \text{kde} \quad D = \left\{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2;\ x^2+y^2 \leq a^2\right\}$$

je kruh, tak tento kruh je obrazom obdĺžnika

$$K = \{(r,\varphi)\,;\ 0 \leq r \leq a,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}\,.$$

$\boldsymbol{g}$ nie je injektívne na K, pretože všetky body z $\{0 \leq \varphi < 2\pi, r = 0\}$ sa zobrazia do stredu súradnicového systému. Ale celá táto úsečka má obsah nula, teda je aplikovateľná zoslabená verzia vety o zámene súradníc a dostávame

Theorem 362 *Nech $K = \{(r,\varphi)\,;\ 0 \leq r \leq a,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ a*

$$\boldsymbol{g} : \boldsymbol{R}^2 \longrightarrow \boldsymbol{R}^2, \boldsymbol{g}(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi) = (x,y)$$

je transformácia pomocou polárnych súradníc. Ak funkcia $f : \boldsymbol{g}(K) \longrightarrow \boldsymbol{R}$ je spojitá, potom pre každú Jordanovsky merateľnú $A \subset K$ platí

$$\iint_{\boldsymbol{g}(A)} f(x,y)dxdy = \iint_A (f \circ \boldsymbol{g})(r,\varphi)\,rdrd\varphi = \iint_A f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,rdrd\varphi.$$

Example 363 *Vypočítajte $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$, kde $D = \{(x,y)\,;\ x^2+y^2 \leq a^2\}\,.$*

Solution 364 *Zámenou do polárnych súradníc dostaneme:*

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy = \iint_R rrdrd\varphi = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^a r^2dr\right)d\varphi = \frac{2\pi a^3}{3}.\square$$

Example 365 *Vypočítajte $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$, kde $D = \{(x,y)\,;\ x^2+y^2 \leq ax\}\,.$*

Solution 366 *Zámenou do polárnych súradníc dostaneme:*

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy = \iint_R r^2drd\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{a\cos\varphi} r^2dr\right)d\varphi = \frac{4a^3}{9}.\square$$

b) Cylindrické súradnice: podobne ako polárne, tak aj cylindrické súradnice sú dané:

$$x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi,\ z = z,\ kde\ r^2 = x^2+y^2\ a\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}, x \neq 0.$$

Potom funkcia

$$\boldsymbol{g} : \boldsymbol{R}^3 \longrightarrow \boldsymbol{R}^3, \boldsymbol{g}(r,\varphi,z) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) = (x,y,z)\,,$$

zobrazuje kváder

$$K = \{(r,\varphi,z)\,;\ 0 \leq r \leq a,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi,\ 0 \leq z \leq b\}$$

na cylinder V, pričom

$$J_{\boldsymbol{g}} = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,z)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r \neq 0, \quad \text{pre} \quad r \neq 0$$

Theorem 367 *Nech* $K = \{(r, \varphi, z)\,;\, 0 \le r \le a,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le z \le b\}$ *a*

$$\boldsymbol{g} : \boldsymbol{R}^3 \longrightarrow \boldsymbol{R}^3, \boldsymbol{g}(r, \varphi, z) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) = (x, y, z)$$

je transformácia pomocou cylindrických súradníc. Ak funkcia $f : \boldsymbol{g}(K) \longrightarrow \boldsymbol{R}$ *je spojitá, potom pre každú Jordanovsky merateľnú* $A \subset K$ *platí*

$$\iiint_{\boldsymbol{g}(A)} f(x,y,z)dxdydz = \iiint_A (f \circ \boldsymbol{g})(r, \varphi, z)\, rdrd\varphi dz = \iiint_A f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\, rdrd\varphi dz.$$

Example 368 *Nech* $A = \left\{(x,y,z) \in \boldsymbol{R}^3;\ \sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{2-x^2-y^2}\right\}$. *Vypočítajte* $\iiint_A zdxdydz$.

Solution 369 *Tento príklad sme už riešili avšak bez použitia zámeny súradníc. Aplikujme teraz cylindrické súradnice, potom elementárnu oblasť popíšeme takto:*

$$A : 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le r \le 1, r \le z \le \sqrt{2-r^2},$$

potom máme

$$\iiint_A zdxdydz = \iiint_R zrdrd\varphi dz = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left[\int_r^{\sqrt{2-r^2}} rzdz \right] dr \right) d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(2r - 2r^3\right) dr \right) d\varphi = \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^1 d\varphi = \frac{\pi}{2}. \square$$

c) Sférické súradnice: posledným typom bude zámena kartézskych súradníc (x, y, z) za sférické súradnice (r, φ, ϑ), pričom

$$x = r\cos\varphi\cos\vartheta,\ y = r\sin\varphi\cos\vartheta,\ z = r\sin\vartheta, \quad \text{kde} \ \ 0 \le r < \infty, 0 \le \varphi \le 2\pi, -\frac{\pi}{2} \le \vartheta \le \frac{\pi}{2},$$

kde $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, uhol φ je odchýlka od osi x v rovine xy a ϑ je odchýlka od roviny xy. Potom

$$\boldsymbol{g} : \boldsymbol{R}^3 \longrightarrow \boldsymbol{R}^3, \boldsymbol{g}(r, \varphi, \vartheta) = (r\cos\varphi\cos\vartheta, r\sin\varphi\cos, r\sin\vartheta) = (x, y, z),$$

zobrazuje kváder

$$K = \left\{(r, \varphi, \vartheta)\,; 0 \le r \le a, 0 \le \varphi \le 2\pi, -\frac{\pi}{2} \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}\right\}$$

na guľu

$$G = \left\{(x,y,z) \in \boldsymbol{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 \le a^2\right\},$$

je injektívna s výnimkou $r = 0$ a platí

$$J_{\boldsymbol{g}} = \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\vartheta)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \vartheta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi\cos\vartheta & -r\sin\varphi\cos\vartheta & -r\cos\varphi\sin\vartheta \\ \sin\varphi\cos\vartheta & r\cos\varphi\cos\vartheta & -r\sin\varphi\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & 0 & r\cos\vartheta \end{vmatrix} = r^2\cos\vartheta.$$

Theorem 370 *Nech* $K = \left\{(r, \varphi, \vartheta)\,; 0 \le r \le a, 0 \le \varphi \le 2\pi, -\frac{\pi}{2} \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}\right\}$ *a*

$$\boldsymbol{g} : \boldsymbol{R}^3 \longrightarrow \boldsymbol{R}^3, \boldsymbol{g}(r, \varphi, \vartheta) = (r \cos\varphi \cos\vartheta, r \sin\varphi \cos, r \sin\vartheta) = (x, y, z)$$

je transformácia pomocou sférických súradníc. Ak funkcia $f : \boldsymbol{g}(K) \longrightarrow \boldsymbol{R}$ *je spojitá, potom pre každú Jordanovsky merateľnú* $A \subset K$ *platí*

$$\iiint_{\boldsymbol{g}(A)} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_A (f \circ \boldsymbol{g})(r, \varphi, \vartheta)\, r^2 \cos\vartheta dr d\varphi d\vartheta =$$

$$= \iiint_A f\left(r \cos\varphi \cos\vartheta, r \sin\varphi \cos, r \sin\vartheta\right) r^2 \cos\vartheta dr d\varphi d\vartheta.$$

Example 371 *Nájdite objem* V *oblasti* A *ohraničenej plochou* $r = 3\cos\vartheta$*, ktorú nazývame torus.*

Solution 372 *Pretože* $3\cos\vartheta \ge 0$*, odtiaľ máme* $-\frac{\pi}{2} \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}$*. Tak máme:*

$$A : 0 \le \varphi \le 2\pi, -\frac{\pi}{2} \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}, 0 \le r \le 3\cos\vartheta.$$

Potom

$$V = \iiint_A 1 dx dy dz = \iiint_R r^2 \cos\vartheta dr d\varphi d\vartheta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^{3\cos\vartheta} r^2 \cos\vartheta dr \right] d\vartheta \right) d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 9\cos^4\vartheta d\vartheta \right) d\varphi = \frac{27}{4}\pi^2. \square$$

Cvičenia.

1. Vypočítajte dvojné integrály:

2. $\iint_I \frac{x}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} dxdy,\ I = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle$. $\left[\ln \frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}\right]$

3. $\iint_I \frac{1}{(1-xy)^2} dxdy,\ I = \langle 2,3\rangle \times \langle 1,2\rangle$. $\left[\ln\left(\frac{6}{5}\right)\right]$

   Vypočítajte dvojné integrály, načrtnite obrázok množiny A : (Na nasledujúcich obrázkoch sú pre Vašu lepšiu predstavu nakreslené odpovedajúce hranice elementárnych oblastí.)

4. $\iint_A ye^x dxdy,\ A = \{(x,y)\,;\ y^2 \le x \le y+2\}$. $\left[\ \frac{1}{2}\left(e^4+e\right)\ \right]$

5. $\iint_A \frac{x^2}{y^2} dxdy,\ A = \left\{(x,y)\,;\ 0 \le \frac{1}{x} \le y \le x,\ x \le 2\right\}$. $\left[\ \frac{9}{4}\ \right]$

6. $\iint_A \left(3x^2+2y\right) dxdy,\ A = \{(x,y)\,;\ x^2 \le y \le \sqrt{x},\ x \ge 0\}$. $\left[\ -\frac{1}{70}\ \right]$

7. $\iint_A xydxdy,\ A = \{(x,y)\,;\ x-4 \le y,\ y^2 \le 2x\}$. $\left[\ \frac{975}{16}\ \right]$

8. $\iint_A \sqrt{xy-y^2}dxdy,\ A = \left\{(x,y)\,;\ 0 \le y \le 3,\ \frac{x}{10} \le y \le x\right\}$. $\left[\ 162\ \right]$

9. $\iint_A \left(x^2+y\right) dxdy$, A je ohraničená krivkami $y = \frac{1}{2}x,\ y = 2x,\ xy = 2,\ x \ge 0$. $\left[\ \frac{17}{6}\ \right]$

10. $\iint_A \frac{1}{x+y+1} dxdy$, A je trojuholník KLM, $K = (1,2)\,,\ L = (5,2)\,,\ M = (4,4)$. $\left[\ \frac{72}{5}\ln 18 - 16\ln 16 + \frac{8}{5}\ln 8\ \right]$

    Vypočítajte trojné integrály. Načrtnite obrázok množiny A.

11. $\iiint_A (1-x)\,yzdxdydz,\ A = \{(x,y,z)\,;\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0,\ z \le 1-x-y\}$. $\left[\ \frac{1}{144}\ \right]$

12. $\iiint_A zdxdydz,\ A = \left\{(x,y,z)\,;\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ \sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{1-x^2-y^2}\right\}$. $\left[\ \frac{\pi}{8}\ \right]$

13. $\iiint_A \left(x^2+y^2\right) dxdydz,\ A = \{(x,y,z)\,;\ x^2+y^2 \le 2z,\ z \le 2\}$. $\left[\ \frac{16}{3}\pi\ \right]$

V príkladoch 1 - 8 vypočítajte dvojné integrály použitím vhodnej transformácie:

14. $\iint_A \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy,\ A=\{(x,y)\,;\ x^2+y^2\le 1,\ x\ge 0,\ y\ge 0\}$. $\left[\ \frac{\pi}{6}\ \right]$

15. $\iint_A xy^2dxdy,\ A=\{(x,y)\,;\ 2y\le x^2+y^2\le 4y\}$. $\left[\ 0\ \right]$

16. $\iint_A \sin\sqrt{x^2+y^2}dxdy,\ A=\{(x,y)\,;\ \pi^2\le x^2+y^2\le 4\pi^2\}$. $\left[\ -6\pi^2\ \right]$

17. $\iint_A \sqrt{a^2-x^2-y^2}dxdy,\ A=\{(x,y)\,;\ x^2+y^2\le ax\}$. $\left[\ \frac{a^3}{3}\left(\pi-\frac{4}{3}\right)\ \right]$

18. $\iint_A \operatorname{arctg}\frac{y}{x}dxdy,\ A=\left\{(x,y)\,;\ 1\le x^2+y^2\le 9,\ \frac{x}{\sqrt{3}}\le y\le\sqrt{3}x\right\}$. $\left[\ \frac{\pi^2}{6}\ \right]$

19. $\iint_A (1-2x-3y)\,dxdy,\ A=\{(x,y)\,;\ x^2+y^2\le 4\}$. $[4\pi]$

20. $\iint_A \sin\left(\pi\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy,\ A=\{(x,y)\,;\ x^2+y^2\le 1,\ 0\le x\le y\}$. $\left[\ \frac{1}{4}\ \right]$

21. $\iint_A \ln(1+x^2+y^2)\,dxdy,\ A=\left\{(x,y)\,;\ y\le\sqrt{R^2-x^2},\ x\ge 0,\ y\ge 0\right\}$.
$\left[\frac{\pi}{4}(1+R^2)\ln(1+R^2)-R^2\right]$

V úlohách 9 – 11 vypočítajte plošný obsah rovinných obrazcov určených množinou A, keď

22. A je ohraničená krivkami: $y=\frac{1}{2}(x-2)^2$ a $x^2+y^2=4$. $\left[\ \pi-\frac{4}{3}\ \right]$

23. $A=\{(x,y)\,;\ 0\le y\le x,\ x^2+y^2\le 2x\}$. $\left[\ \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ \right]$

24. $A=\left\{(x,y)\,;\ x\le y\le\sqrt{3}x,\ 4x\le x^2+y^2\le 8x\right\}$. $\left[\ \pi-6+3\sqrt{3}\ \right]$

V úlohách 12 – 16 vypočítajte trojné integrály použitím vhodnej transformácie. Načrtnite obrázok množiny A.

1. $\iiint_A z^2dxdydz,\ A=\left\{(x,y,z)\,;\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ \sqrt{x^2+y^2}\le z\le\sqrt{2-x^2-y^2}\right\}$.
$\left[\ \frac{\pi}{15}\left(2\sqrt{2}-1\right)\ \right]$

2. $\iiint_A (x^2+y^2+z^2)\,dxdydz,\ A=\{(x,y,z)\,;\ x^2+y^2\le z^2,\ x^2+y^2+z^2\le R^2\}$.
$\left[\ 2\frac{2-\sqrt{2}}{5}\pi R^5\ \right]$

3. $\iiint_A \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz,\ A=\{(x,y,z)\,;\ x^2+y^2+z^2\le z\}$. $\left[\ \frac{\pi}{10}\ \right]$

4. $\iiint_A \frac{xy}{\sqrt{z}} dxdydz,\ A = \left\{(x,y,z)\,;\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ 0 \leq z \leq 3,\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} \leq 0\right\}.$
$\left[\ \frac{4}{3}\ \right]$

5. $\iiint_A x^2 yz dxdydz,\ A = \{(x,y,z)\,;\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \leq 0,\ 4x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.$
[Použite zovšeobecnené sférické súradnice $-\frac{1}{840}$]

V úlohách 17 – 21 nájdite objem množiny A. Načrtnite obrázok!

6. $A = \{(x,y,z)\,;\ x^2 + y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq y^2\}.$ $\left[\ \frac{\pi}{4}\ \right]$

7. $A = \{(x,y,z)\,;\ x^2 + y^2 \leq 2x,\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}.$ $\left[\ \frac{16}{9}(3\pi - 4)\ \right]$

8. A je ohraničená plochami $z = 6 - x^2 - y^2$ a $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. $\left[\ \frac{32}{3}\pi\ \right]$

9. A je ohraničená plochami $2z = x^2 + y^2,\ z = \sqrt{x^2 + y^2}$. $\left[\ \frac{4}{3}\pi\ \right]$

10. A je ohraničená plochami $x^2 + y^2 = 2x,\ x^2 + y^2 = z - 2,\ z = 0.$ $\left[\ \frac{7}{2}\pi\ \right]$

BIBLIOGRAPHY

[1] Galanová, J., Gatial, J., Kaprálik, P.: Lineárna algebra, STU Bratislava, 2002

[2] Marko Ľ.: Matematická analýza online, 2001, http://www.aladin.elf.stuba.sk/~marko

[3] Stroud,K.A.: Engineering Mathematics, Macmillan Presss LTD, Hong Kong, 1993

[4] Šulka, R., Moravský, L., Satko, L.: Matematická analýza I, Alfa, SNTL, Bratislava 1986

[5] Glyn, J.: Modern engineering mathematics, Addison Wesley, 2008

http://aladin.elf.stuba.sk/~marko/mindex.tex

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \frac{a^2}{4} \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \pi\frac{a^2}{8} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{a^2}{4}\left(3-\frac{\pi}{2}\right) \\ 0 & 0 & 1 & 1 & a^2\left(1-\frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix}, \text{ row echelon form: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -\frac{3}{4}a^2+\frac{1}{4}\pi a^2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{3}{4}a^2-\frac{1}{8}\pi a^2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & a^2-\frac{1}{4}\pi a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$