

**Vyšetrite stacionárne body a lokálne extrémym nasledujúcich funkcií:**

1.  $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 2x - y$   
 $\left[ \begin{array}{lll} \text{stacionárne body:} & \text{extrém:} & \text{funkčná hodnota:} \\ A = (1, 0) & \text{áno; o. lok. minimum} & f(A) = -1 \end{array} \right]$
2.  $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy + 2$   
 $\left[ \begin{array}{lll} \text{stacionárne body:} & \text{extrém:} & \text{funkčná hodnota:} \\ A = (0, 0) & \text{nie; sedlový bod} & \\ B = (-1, -1) & \text{áno; o. lok. maximum} & f(B) = 3 \end{array} \right]$
3.  $f(x, y) = x^2 + y^3$   
 $\left[ \begin{array}{lll} \text{stacionárne body:} & \text{extrém:} & \text{funkčná hodnota:} \\ A = (0, 0) & \text{nie; sedlový bod} & \end{array} \right]$
4.  $f(x, y) = x^2 + y^4$   
 $\left[ \begin{array}{lll} \text{stacionárne body:} & \text{extrém:} & \text{funkčná hodnota:} \\ A = (0, 0) & \text{áno; o. lok. minimum} & f(A) = 0 \end{array} \right]$
5.  $f(x, y) = x^3 + 3y^2 - 6xy - 6x + 6y$   
 $\left[ \begin{array}{lll} \text{stacionárne body:} & \text{extrém:} & \text{funkčná hodnota:} \\ A = (2, 1) & \text{áno; o. lok. minimum} & f(A) = -7 \\ B = (0, -1) & \text{nie; sedlový bod} & \end{array} \right]$
6.  $f(x, y) = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$   
 $\left[ \begin{array}{lll} \text{stacionárne body:} & \text{extrém:} & \text{funkčná hodnota:} \\ A = (0, 0) & \text{áno; o. lok. minimum} & f(A) = 0 \\ B = (-\frac{5}{3}, 0) & \text{nie; sedlový bod} & \\ C = (1, 4) & \text{nie; sedlový bod} & \\ D = (1, -4) & \text{nie; sedlový bod} & \end{array} \right]$
7.  $f(x, y) = e^{2x}(x + 2y + y^2)$   
 $\left[ \begin{array}{lll} \text{stacionárne body:} & \text{extrém:} & \text{funkčná hodnota:} \\ A = (\frac{1}{2}, -1) & \text{áno; o. lok. minimum} & f(A) = -\frac{e}{2} \end{array} \right]$
8.  $f(x, y) = 5xy + \frac{25}{x} + \frac{8}{y}; x > 0, y > 0$   
 $\left[ \begin{array}{lll} \text{stacionárne body:} & \text{extrém:} & \text{funkčná hodnota:} \\ A = (\frac{5}{2}, \frac{4}{5}) & \text{áno; o. lok. minimum} & f(A) = 30 \end{array} \right]$
9.  $f(x, y) = x^2(1 + y^2)$   
 $\left[ \begin{array}{lll} \text{stacionárne body:} & \text{extrém:} & \text{funkčná hodnota:} \\ A_y = (0, y); y \in \mathbb{R} & \text{áno; lok. minimá} & f(A_y) = 0 \forall y \in \mathbb{R} \end{array} \right]$
10.  $f(x, y) = \frac{xy}{2} + (47 - x - y)(\frac{x}{3} + \frac{y}{4}); x > 0, y > 0$   
 $\left[ \begin{array}{lll} \text{stacionárne body:} & \text{extrém:} & \text{funkčná hodnota:} \\ A = (21, 20) & \text{áno; o. lok. minimum} & f(A) = 282 \end{array} \right]$
11.  $f(x, y) = xy(2 - x - y)$   
 $\left[ \begin{array}{lll} \text{stacionárne body:} & \text{extrém:} & \text{funkčná hodnota:} \\ A = (0, 0) & \text{nie; sedlový bod} & \\ B = (2, 0) & \text{nie; sedlový bod} & \\ C = (0, 2) & \text{nie; sedlový bod} & \\ D = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}) & \text{áno; o. lok. maximum} & f(D) = \frac{8}{27} \end{array} \right]$

$$12. f(x, y) = e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2)$$

[	stacionárne body: extrém:	funkčná hodnota:
	$A = (0, 0)$ áno; o. lok. minimum	$f(A) = 0$
	$B = (-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2})$ nie; sedlový bod	

$$13. f(x, y) = e^{-x^2-y^2}(x^2 + 2y^2)$$

[	stacionárne body: extrém:	funkčná hodnota:
	$A = (0, 0)$ áno; o. lok. minimum	$f(A) = 0$
	$B = (0, 1)$ áno; o. lok. maximum	$f(B) = \frac{2}{e}$
	$C = (0, -1)$ áno; o. lok. maximum	$f(C) = f(B)$
	$D = (1, 0)$ nie; sedlový bod	
	$E = (-1, 0)$ nie; sedlový bod	

$$14. f(x, y) = x^4 + y^4 + 4(x^3 - y^3) + 5(x^2 + y^2) + 4(x - y) - 2xy + 2$$

[	stacionárne body: extrém:	funkčná hodnota:
	$A = (-1, 1)$ nie; sedlový bod	
	$B = (0, 2)$ áno; o. lok. minimum	$f(B) = -2$
	$C = (-2, 0)$ áno; o. lok. minimum	$f(C) = f(B)$

$$15. f(x, y, z) = 35 - 6x + 2z + x^2 - 2xy + 2y^2 + 2yz + 3z^2$$

[	stacionárne body: extrém:	funkčná hodnota:
	$A = (8, 5, -2)$ áno; o. lok. minimum	$f(A) = 9$

$$16. f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x + 2z$$

[	stacionárne body: extrém:	funkčná hodnota:
	$A = (-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -1)$ áno; o. lok. minimum	$f(A) = -\frac{4}{3}$

$$17. f(x, y) = xy \ln(x^2 + y^2)$$

[	stacionárne body: extrém:	funkčná hodnota:
	$A = (1, 0)$ nie; sedlový bod	
	$B = (-1, 0)$ nie; sedlový bod	
	$C = (0, 1)$ nie; sedlový bod	
	$D = (0, -1)$ nie; sedlový bod	
	$E = (\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}})$ áno; o. lok. minimum	$f(E) = -\frac{1}{2e}$
	$F = (-\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}})$ áno; o. lok. minimum	$f(F) = f(E)$
	$G = (\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}})$ áno; o. lok. maximum	$f(G) = \frac{1}{2e}$
	$H = (-\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}})$ áno; o. lok. maximum	$f(H) = f(G)$

Výšetrite absolútne (globálne) extrémny funkcie  $f$  na kompaktnej množine  $M \subset \mathbb{R}^2$ , ak:

$$1. f(x, y) = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1; M \text{ je ohraničená priamkami: } x = 0, y = 0, x + y - 3 = 0$$

[	abs. minimum: $f(0, 3) = -19$
	abs. maximum: $f(0, 0) = -1$

$$2. f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy; M \text{ je ohraničená priamkami: } x = 0, x = 2, y = -1, y = 2$$

[	abs. minimum: $f(0, -1) = f(1, 1) = -1$
	abs. maximum: $f(2, -1) = 13$

$$3. f(x, y) = x^2 + y^2 - 12x + 16; M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 49\}$$

[	abs. minimum: $f(6, 0) = -20$
	abs. maximum: $f(-7, 0) = 149$

4.  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ ;  $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 25\}$   
 $\left[ \begin{array}{l} \text{abs. minimum: } f(0, 0) = 0 \\ \text{abs. maximum: } 5 = f(a, b), \text{ kde } a^2 + b^2 = 25 \end{array} \right]$

5.  $f(x, y) = \ln \left( \frac{x^2+1}{y+5} \right)$ ;  $M$  je množina tých bodov  $(x, y)$ , pre ktoré:  $x^2 \leq y \leq 4$   
 $\left[ \begin{array}{l} \text{abs. minimum: } f(0, 4) = -\ln 9 \\ \text{abs. maximum: } f(-2, 4) = f(2, 4) = \ln 5 - \ln 9 \end{array} \right]$