

TEST 11

Substitúcia v dvojnóm integráli.

Príklad. Vypočítajte

$$\iint_M \frac{xy}{x^2 + y^2 + 1} dx dy$$

ak množina M je daná nerovnosťami $x^2 + y^2 \leq 4$, $x \geq 0$, $x \leq y$.

Riešenie musí obsahovať celý postup.

Nakreslite množinu M .

Popíšte nerovnosťami elementárnu oblasť.

Riešenie. Urobíme substitúciu do polárnych súradníc

$$x = r \cos \varphi,$$

$$y = r \sin \varphi.$$

Popis oblasti v premenných r , φ vyzerať nasledovne

$$0 \leq r \leq 2,$$

$$\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Teraz

$$\begin{aligned} \iint_M \frac{xy}{x^2 + y^2 + 1} dx dy &= \int_0^2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^2 \cos \varphi \sin \varphi}{r^2 + 1} r d\varphi dr = \\ \int_0^2 \frac{r^3}{r^2 + 1} \left[\frac{\sin^2 \varphi}{2} \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dr &= \int_0^2 \frac{1}{4} \frac{r^3}{r^2 + 1} dr = \frac{1}{4} \int_0^2 r - \frac{r}{r^2 + 1} dr = \\ \frac{1}{4} \left[\frac{r^2}{2} - \frac{1}{2} \ln(r^2 + 1) \right]_0^2 &= \frac{1}{4} \left(2 - \frac{1}{2} \ln 5 \right). \end{aligned}$$