

Príklad 1. Je daná funkcia

$$f(x, y) = \ln(3x + xy).$$

- Nájdite definičný obor funkcie f a nakreslite ho.
- Napíšte rovnicu dotykovej roviny ku grafu f v bode $[e, -2]$.
- Napíšte prvý diferenciál funkcie f v bode $[e, -2]$.
- Vypočítajte deriváciu funkcie f v bode $[e, -2]$ v smere danom vektorom $\vec{u} = (e, 1)$.

Riešenie 1.

a, $D_f = \{[x, y]; (x > 0 \wedge y > -3) \vee (x < 0 \wedge y < -3)\}$

b, $f(e, -2) = \ln e = 1$.

$$f'_x(x, y) = \frac{1}{x}, \quad f'_x(e, -2) = \frac{1}{e}.$$

$$f'_y(x, y) = \frac{1}{3+y}, \quad f'_y(e, -2) = 1.$$

Rovnica dotykovej roviny v bode $[e, -2]$ je

$$z - 1 = \frac{1}{e}(x - e) + 1(y + 2).$$

c, Prvý diferenciál v bode $[e, -2]$ je

$$df(x, y, e, -2) = \frac{1}{e}(x - e) + 1(y + 2).$$

d, Vektor \vec{u} má dĺžku $|\vec{u}| = \sqrt{e^2 + 1}$.

Jednotkový vektor v rovnakom smere je vektor $\left(\frac{e}{\sqrt{e^2+1}}, \frac{1}{\sqrt{e^2+1}}\right)$.

Preto

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(e, -2) = \left(\frac{1}{e}, 1\right) \cdot \left(\frac{e}{\sqrt{e^2+1}}, \frac{1}{\sqrt{e^2+1}}\right) = \frac{2}{\sqrt{e^2+1}}$$

Príklad 2. Je daná funkcia

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} & \text{pre } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{pre } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- Vypočítajte parciálnu deriváciu $f'_x(x, y)$ v bodoch rôznych od bodu $[0, 0]$.
- Vypočítajte parciálne derivácie $f'_x(0, 0)$ a $f'_y(0, 0)$.
- Pomocou definície rozhodnite, či je funkcia f diferencovateľná v bode $[0, 0]$.

Riešenie 2.

a, $f'_x(x, y) = \frac{y^2(x^2 + y^2) - 2x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^4 - x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2}$ pre $[x, y] \neq [0, 0]$.

b, $f'_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{x - 0} = 0$ a

$$f'_y(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{y - 0} = 0.$$

c, Počítajme limitu

$$\lim_{[x, y] \rightarrow [0, 0]} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - f'_x(0, 0)(x - 0) - f'_y(0, 0)(y - 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} =$$

$$= \lim_{[x, y] \rightarrow [0, 0]} \frac{\frac{xy^2}{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Pri zúžení $\varphi(t) = (t, t)$ dostaneme limitu

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3}{\sqrt{2t}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \neq 0.$$

Pretože limita pri zvolenom zúžení nie je nula, ani pôvodná limita nemôže byť nulová, a teda funkcia nie je diferencovateľná v bode $[0, 0]$.

Príklad 3. Nájdite lokálne extrémny funkcie

$$f(x, y) = x^3 + 8y^3 - 24xy + 5.$$

Riešenie 3.

Vypočítajme parciálne derivácie

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 24y,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 24y^2 - 24x.$$

Zo sústavy

$$3x^2 - 24y = 0, \quad 24y^2 - 24x = 0$$

dostaneme dosadením $x = y^2$ z druhej do prvej rovnice

$$y^4 - 8y = 0.$$

Rovnica má dve riešenia $y_1 = 0$ a $y_2 = 2$.

Stacionárne body sú teda

$$A = [0, 0] \text{ a } B = [4, 2].$$

$$D = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & -24 \\ -24 & 48y \end{pmatrix}$$

$$D(A) = \begin{pmatrix} 0 & -24 \\ -24 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_2(A) = \det D(A) = -24^2 < 0.$$

Bod A je sedlový bod funkcie f .

$$D(B) = \begin{pmatrix} 24 & -24 \\ -24 & 96 \end{pmatrix}$$

$$D_1(B) = 24 > 0, \quad D_2(B) = \det D(B) = 24 \cdot 96 - 24^2 > 0.$$

Bod B je bodom ostrého lokálneho minima funkcie f .

Príklad 4. Použitím substitúcie vypočítajte

$$\iint_M x \, dx \, dy$$

ak množina M je daná nerovnosťami $x^2 + y^2 \leq 4y$, $x \geq 0$.

Nakreslite množinu M .

Popíšte M ako elementárnu oblasť v polárnych súradniciach.

Riešenie 4. Popis M ako elementárnej oblasti typu φr je

$$\begin{aligned} 0 &\leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0 &\leq r \leq 4 \sin \varphi. \end{aligned}$$

Preto

$$\begin{aligned} \iint_M x \, dx dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{4 \sin \varphi} r^2 \cos \varphi \, dr \right) d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{3} r^3 \cos \varphi \right]_0^{4 \sin \varphi} d\varphi = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3} 64 \sin^3 \varphi \cos \varphi \, d\varphi = \frac{16}{3} [\sin^4 \varphi]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{16}{3}. \end{aligned}$$

Príklad 5. Vypočítajte

$$\iint_M x e^y \, dx dy$$

ak ohraničená množina M je daná nerovnosťami $y \leq 2 - x$, $y \geq x^2$.

Nakreslite množinu M .

Popíšte M ako elementárnu oblasť.

Pri výpočte integrálu napíšte celý postup.

Riešenie 5. Popis M ako elementárnej oblasti typu xy je

$$\begin{aligned} -2 &\leq x \leq 1, \\ x^2 &\leq y \leq 2 - x. \end{aligned}$$

Teraz

$$\begin{aligned} \iint_M x e^y \, dx dy &= \int_{-2}^1 \left(\int_{x^2}^{2-x} x e^y \, dy \right) dx = \int_{-2}^1 [x e^y]_{x^2}^{2-x} dx = \\ &= \int_{-2}^1 (x e^{2-x} - x e^{x^2}) dx = \int_{-2}^1 x e^{2-x} dx - \int_{-2}^1 x e^{x^2} dx. \end{aligned}$$

Prvý integrál počítame metódou per partes, druhý pomocou substitúcie $z = x^2$.

$$\int_{-2}^1 x e^{2-x} dx = [-x e^{2-x}]_{-2}^1 + \int_{-2}^1 e^{2-x} dx = -e - 2e^4 - [e^{2-x}]_{-2}^1 = -2e - e^4.$$

$$\int_{-2}^1 x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_4^1 e^z dz = \frac{1}{2}(e - e^4).$$

Spolu

$$\iint_M x e^y \, dx dy = -2e - e^4 - \frac{1}{2}(e - e^4) = -\frac{1}{2}e^4 - \frac{5}{2}e.$$