

CVIČENIE 8.

Dvojný integrál.

Definícia. Nech $\varphi(x), \psi(x) : [a, b] \rightarrow R$ sú spojité funkcie.

Nech $\forall x \in (a, b) \quad \varphi(x) < \psi(x)$. Množinu

$$M_{xy} = \{[x, y] \in R^2; a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$$

nazývame elementárna oblasť typu xy .

Definícia. Nech $\varphi(y), \psi(y) : [c, d] \rightarrow R$ sú spojité funkcie.

Nech $\forall y \in (c, d) \quad \varphi(y) < \psi(y)$. Množinu

$$M_{yx} = \{[x, y] \in R^2; c \leq x \leq d, \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)\}$$

nazývame elementárna oblasť typu yx .

Popíšte množinu M ako elementárnu oblasť typu xy alebo typu yx .

1. $M = [0, 1] \times [1, 3]$.
2. M je trojuholník ABC $A = [0, 1]$, $B = [1, 1]$, $C = [1, 3]$
3. M je trojuholník ABC $A = [1, 1]$, $B = [3, 2]$, $C = [3, 3]$
4. M je ohraničená krivkami $xy = 2$, $x + y = 3$.

Veta (Fubini na intervale). Nech $M = [a, b] \times [c, d]$ a $f : M \rightarrow R$ je integrova-
teľná funkcia. Nech pre každé $x \in [a, b]$ existuje integrál

$$K(x) = \int_c^d f(x, y) dy$$

Potom

$$\iint_M f(x, y) dx dy = \int_a^b K(x) dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

Vypočítajte dvojný integrál na obdĺžniku

5. $\iint_M x^2 y dx dy$ ak $M = [0, 1] \times [1, 3]$.
6. $\iint_M y e^{x+y} dx dy$ ak $M = [0, 1] \times [0, 2]$.
7. $\iint_M xy \sin y dx dy$ ak $M = [1, 2] \times [0, \frac{\pi}{2}]$.

Výsledky

1. $0 \leq x \leq 1, \quad 1 \leq y \leq 3$
2. $0 \leq x \leq 1, \quad 1 \leq y \leq 2x + 1$
3. $1 \leq x \leq 3, \quad \frac{1}{2}(x + 1) \leq y \leq x$
4. $1 \leq x \leq 2, \quad \frac{2}{x} \leq y \leq 3 - x$
5. $\frac{4}{3}$ 6. $e^3 - e^2 + e - 1$ 7. $\frac{3}{2}$