

CVIČENIE 7.

**Viazané a absolútne extrémny funkcie viacerých premenných.**

**Viazané extrémny.**

Majme danú funkciu  $f(x, y)$  a podmienku  $g(x, y) = 0$ . Ak  $\varphi(t) : R^2 \rightarrow R$  je taká funkcia jednej premennej  $t$ , pre ktorú  $g(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) = 0$ , tak lokálne extrémny zloženej funkcie  $f(\varphi(t))$  nazývame viazané extrémny funkcie  $f$  vzhľadom na podmienku  $g$ .

Nájdite body viazaných extrémov funkcie viacerých premenných

1.  $f(x, y) = xy - x^2 + y^2 + 2x - 5y + 3$ , ak  $2x + 3y = 1$ .
2.  $f(x, y) = xy$ , ak  $x + y = 1$ .
3.  $f(x, y) = \sin^2 x + \sin^2 y$ , ak  $x - y = \frac{\pi}{4}$ .
4.  $f(x, y, z) = xyz$ , ak  $x + y + z = 1$ .
5.  $f(x, y) = xy$  ak  $x^2 + y^2 = 2$ . Návod: Použite funkciu  $\varphi(t) = (\sqrt{2} \cos t, \sqrt{2} \sin t)$ .

**Výsledky**

1.  $[\frac{47}{22}, -\frac{12}{11}]$  je bod viazaného ostrého lokálneho maxima
2.  $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  je bod viazaného ostrého lokálneho maxima
3. Body  $[\frac{\pi}{8} + k\pi, -\frac{\pi}{8} + k\pi]$ , sú body viazaného ostrého lokálneho minima.  
Body  $[\frac{5\pi}{8} + k\pi, \frac{3\pi}{8} + k\pi]$ , sú body viazaného ostrého lokálneho maxima.
5. Body  $[1, -1], [-1, 1]$  sú body viazaného ostrého lokálneho minima.  
Body  $[1, 1], [-1, -1]$  sú body viazaného ostrého lokálneho maxima.

**Absolútne extrémny.**

**Veta.** Spojitá funkcia  $f : A \subset R^2 \rightarrow R$  definovaná na ohraničenej a uzavretej oblasti  $A$  nadobúda na tejto oblasti absolútne maximum aj absolútne minimum.

Absolútne extrémny môže funkcia nadobúdať buď

- vo vnútri oblasti  $A$  ako lokálne extrémny,
- alebo na hraničnej krivke ako viazané extrémny,
- alebo v bode, kde sa pretínajú dve hraničné krivky.

Nájdite absolútne extrémny funkcie  $f$  na uzavretej a ohraničenej množine  $M$ .

1.  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 4y$   $M = \{(x, y); |x| \leq 2, |y| \leq 3\}$ .
2.  $f(x, y) = xy$   $M = \{(x, y); x^2 - 1 \leq y \leq 1 - 3x^2\}$ .
3.  $f(x, y) = xy(4 - x - y)$   $M = \{(x, y); x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 6\}$ .
4.  $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$   $M = \{(x, y); |x| + |y| \leq 1\}$ .
5.  $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}(3x^2 + 2y^2)$   $M = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq 4\}$ .
6.  $f(x, y) = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$   $M = \{(x, y); 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}$ .
7.  $f(x, y, z) = x + y + z$   $M = \{(x, y, z); x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$ .
8.  $f(x, y, z) = xy + yz + zx$   $M = \{(x, y, z); x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$ .