

CVIČENIE 3.

Parciálna derivácia.

Definícia. Nech $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, a nech $[x_0, y_0] \in A$. Nech parciálna funkcia $f(x, y_0)$ jednej premennej x je diferencovateľná v bode x_0 .

Číslo

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f'(x, y_0)|_{x=x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

nazývame parciálna derivácia funkcie f podľa premennej x v bode $[x_0, y_0]$.

Parciálnu deriváciu funkcie f podľa premennej y definujeme analogicky.

Použitím definície vypočítajte parciálnu deriváciu funkcie $f(x, y)$ podľa premennej x v bode a a tiež podľa premennej y v bode a , ak

1. $f(x, y) = x^2y$, $a = [2, 3]$
- 1.1 $f(x, y) = e^{x+2y}y$, $a = [0, 1]$
- 1.2 $f(x, y) = \frac{x-y}{x^2+y^2}$, $a = [3, 1]$

Zamyslite sa, čo znamenajú čísla, ktoré ste vypočítali v predchádzajúcich príkladoch.

Definícia. Nech $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Ak je funkcia f diferencovateľná podľa premennej x v každom bode $[x_0, y_0]$ množiny $B \subseteq A$, tak funkciu $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) : B \rightarrow \mathbb{R}$ (dvoch premenných) voláme parciálna derivácia funkcie f podľa premennej x .

Vypočítajte parciálne derivácie podľa jednotlivých premenných a určte ich definičný obor.

2. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y}$.
3. $f(x, y, z) = 2 \sin xy^2z$.
4. $f(x, y) = yx^{\frac{1}{3}}$.
5. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$
6. $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$

7. Vypočítajte parciálnu deriváciu funkcie $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ podľa premennej x v bode $(1, 2)$. Napíšte rovnicu dotykovvej priamky ku grafu funkcie f , ktorá prechádza bodom $(1, 2, \frac{1}{\sqrt{5}})$ a leží v rovine rovnobežnej so súradnicovou rovinou O_{xz} . (Návod: Je to tiež dotyčnica ku grafu funkcie $f(x, 2)$, pri pevne zvolenom $y = 2$.)

8. Napíšte rovnice dotykových priamok p_1 , a p_2 ku grafu funkcie $f(x, y) = x^2 + 2y^2$, ktoré prechádzajú bodom $(2, 1, 6)$ a ležia v rovinách rovnobežných so súradnicovými rovinami O_{xz} , O_{yz} .

Napíšte rovnicu roviny určenej priamkami p_1 a p_2 .

Dotyková rovina a diferencovateľnosť. Diferenciál.

Ak $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ je diferencovateľná funkcia (definícia nasleduje nižšie), tak rovnica

$$z - z_0 = l_1(x - x_0) + l_2(y - y_0),$$

v ktorej

$$z_0 = f(x_0, y_0), \quad l_1 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \quad l_2 = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

je rovnica dotykovej roviny ku grafu funkcie f v bode $[x_0, y_0, z_0]$.

Výraz (na pravej strane rovnice dotykovej roviny)

$$df(x_0, y_0, x, y) = l_1(x - x_0) + l_2(y - y_0)$$

nazývame prvý diferenciál funkcie f v bode $[x_0, y_0]$. Prvý diferenciál je lineárna funkcia dvoch premenných x a y .

Veta. Ak má funkcia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ spojité parciálne derivácie v bode $[x_0, y_0]$, tak je v danom bode aj diferencovateľná. (A teda má v danom bode dotykovú rovinu a prvý diferenciál.)

Napíšte rovnicu dotykovej roviny a prvý diferenciál funkcie f v bode a .

9. $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad a = (2, 1)$

10. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + xy \quad a = (4, -3)$

11. $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x + y} \quad a = (1, 1)$

12. $f(x, y) = e^{2x+y^2} \quad a = (2, 1)$

Napíšte prvý diferenciál funkcie f v bode a .

13. $f(x, y, z) = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \quad a = (1, 2, 3)$

14*. Napíšte rovnicu dotykovej roviny ku ploche danej rovnosťou $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ v bode $a = (1, ?, 1)$.

15*. Napíšte rovnicu dotykovej roviny ku ploche danej rovnosťou $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ v takom bode a , aby dotyková rovina bola rovnobežná s rovinou $x + y + z = 1$.

Definícia. Nech $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, nech $[x_0, y_0] \in A$ a nech $l_1 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $l_2 = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$. Hovoríme, že funkcia f je diferencovateľná v bode $[x_0, y_0]$ ak

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0) - l_1(x - x_0) - l_2(y - y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0.$$

Zistite, či je daná funkcia diferencovateľná v bode a a napíšte jej diferenciál a dotykovú rovinu, ak existujú.

16. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad a = (0, 0)$

17. $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3} \quad a = (0, 0)$

18. $f(x, y) = \sqrt[3]{xy} \quad a = (0, 0)$

$$19. f(x, y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad a = (0, 0)$$

$$20. f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \cos \frac{1}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad a = (0, 0)$$

Výsledky

$$1. \frac{\partial f}{\partial x}(2, 3) = 12, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(2, 3) = 4 \quad 1.5 \frac{\partial f}{\partial x}(0, 1) = e^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 1) = 3e^2$$

$$2. \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{2(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$3. f'_x(x, y, z) = 2 \cos(xy^2z)y^2z, \quad f'_y(x, y, z) = 2 \cos(xy^2z)2xyz, \quad f'_z(x, y, z) = 2 \cos(xy^2z)xy^2$$

$$4. \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^{\frac{1}{3}}$$

$$5. \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \frac{y^3 - x^2y}{(x^2 + y^2)^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - xy^2}{(x^2 + y^2)^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

$$6. \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} x^2(x^3 + y^3)^{-\frac{2}{3}} & \text{ak } y \neq -x \\ 1 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} y^2(x^3 + y^3)^{-\frac{2}{3}} & \text{ak } y \neq -x \\ 1 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Derivácie neexistujú v bodoch $(x, -x)$.

$$7. z - \frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}^3}(x - 1)$$

$$8. z - 6 = 4(x - 2) + 4(y - 1)$$

$$9. z - \frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{2}{\sqrt{5}^3}(x - 2) - \frac{1}{\sqrt{5}^3}(y - 1)$$

$$10. z + 7 = -\frac{11}{5}(x - 4) + \frac{17}{5}(y + 3)$$

$$11. z - 1 = \frac{1}{2}(x - 1) + \frac{1}{2}(y - 1)$$

$$12. z - e^5 = 2e^5(x - 2) + 2e^5(y - 1)$$

$$13. df = -\frac{5}{2}(x - 1) + \frac{1}{12}(y - 2) + \frac{7}{9}(z - 3)$$

$$14. z - 1 = -(x - 1) - \sqrt{2}(y - \sqrt{2}), \quad z - 1 = -(x - 1) + \sqrt{2}(y + \sqrt{2})$$

16. nie je diferencovateľná v bode $[0, 0]$

17. nie je diferencovateľná v bode $[0, 0]$

18. nie je diferencovateľná v bode $[0, 0]$

19. $z = 0$

20. $z = 0$