Prednáška 6.

Matematika môže byť definovaná ako jav, pri ktorom nikdy nevieme, o čom je reč, ani či to, čo sme povedali, je pravda. (Bertrand Russell 1872-1970)

S týmto povzbudivým výrokom sa pustime do rozprávania o ďalšej téme.

Väčšina obsahu predchádzajúcej prednášky pripravila nástroje pre hľadanie a vyšetrovanie lokálnych extrémov funkcií viacerých premenných.

Tak teda poďme na to.

Lokálne extrémy.

Funkciu dvoch premenných si vieme predstaviť ako zvlnenú krajinu. V nej nás budú zaujímať najmä miesta, z ktorých sa už nedá ísť vyššie, teda vrcholy kopcov a miesta, z ktorých sa už nedá zostúpiť nižšie, teda dná jám. Keďže dná jám bývajú väčšinou zaliate vodou (okraj jazera je vrstevnica funkcie), hovorme radšej o vrcholoch.

Zrejme, ak stojíme na vrchole, zvyčajne to nie je Mount Everest, niekde ďalej od nás je vyšší vrchol.

Táto predstava je motiváciou pre pojem lokálneho maxima, ako miesta, ktoré síce nie je absolútne najvyššie, ale v okolí ktorého už nie je nič vyššie.

Cieľom kapitoly je lokálne maximá, respektíve minimá definovať a nájsť techniku ako ich hľadať.

Definícia. Nech $f : A \subset R^2 \to R$ je funkcia definovaná na množine A.

Hovoríme, že funkcia f má v bode $a = [x_0, y_0]$:

- **lokálne minimum**,
  ak $\exists O_\delta(a)$ také, že $\forall [x, y] \in O_\delta(a)$ platí $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$,
- **lokálne maximum**,
  ak $\exists O_\delta(a)$ také, že $\forall [x, y] \in O_\delta(a)$ platí $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$.

V prípade ostrých nerovností hovoríme o ostrom lokálnom minime resp. maxime.

Lokálne minimá a maximá označujeme spoločným termínom lokálne extrémy.

Prirodzeným spôsobom definujeme lokálne extrémy aj pre funkcie väčšieho počtu premenných.

Poznamenajme, že zatiaľ bola funkcia f ľubovoľná, nepotrebovali sme o nej nič predpokladať.

Ak budeme predpokladať, že funkcia f je v každom bode diferencovateľná, tak dotyková rovina v bode, v ktorom má funkcia lokálny extrém, je vodorovná. Teda parciálne derivácie funkcie f (koeficienty pri premenných x a y v rovnici dotykovej roviny), sú nutne nulové.

Iný pohľad na lokálne extrémy je nasledujúci: Ak má funkcia f v bode $[x_0, y_0]$ lokálne maximum alebo minimum a urobíme týmto bodom rez v smere osi x, t.j. parciálnu funkciu $f(x, y_0)$, tak táto parciálna funkcia jednej premennej má v bode x_0 tiež lokálne maximum alebo minimum. Derivácia funkcie jednej premennej v bode lokálneho extrému je nulová. Preto $f'_x(x_0, y_0) = 0$. Rovnakou argumentáciou dostaneme aj $f'_y(x_0, y_0) = 0$.

(Pozorný čitateľ si môže všimnúť, že zatiaľ, čo pri dotykovej rovine sme potrebovali diferencovateľnosť funkcie f, tak pri použití rezov stačilo, aby funkcia f mala parciálne derivácie.

Tento rozdiel nebudeme zdôrazňovať, v ďalšom výklade budeme predpokladať, diferencovateľnosť funkcie f.)

Veta (o nutnej podmienke). *Nech $f : A \subset R^2 \to R$ je diferencovateľná funkcia na množine A.*

Ak f má v bode $a = [x_0, y_0]$ lokálny extrém, tak

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(a) = 0.$$

Veta o nutnej podmienke je nástroj na nájdenie všetkých kandidátov na niektorý druh lokálneho extrému.

Nazveme ich stacionárne body.

Definícia. Nech $f : A \subset R^2 \to R$ je diferencovateľná funkcia na množine A.

Bod $a = [x_0, y_0]$, v ktorom

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0,$$

nazývame **stacionárny bod**.

Príklad 1.

Nájdime stacionárne body funkcie

$$f(x, y) = 2x^3 + 6xy^2 - 3y^3 - 150x.$$

Funkcia f je diferencovateľná na R^2. Použijeme vetu o nutnej podmienke. Riešme sústavu dvoch rovníc

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 + 6y^2 - 150 = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 12xy - 9y^2 = 0.$$

Upravme rovnice na

$$x^2 + y^2 = 25,$$

$$(4x - 3y)y = 0.$$

Druhá rovnica dáva dve možnosti:

a, $y = 0$.
Dosadením do prvej rovnice máme $x_1 = 5$ a $x_2 = -5$.
Stacionárne body pri tejto možnosti sú $A = [5, 0]$ a $B = [-5, 0]$.

b, $4x - 3y = 0$.
Teraz $y = \frac{4}{3}x$ a dosadením do prvej rovnice dostaneme $x^2 + \dfrac{16}{9}x^2 = 25$.
A teda $x_1 = 3$, $x_2 = -3$.
Z rovnice $y = \frac{4}{3}x$ dopočítame pre každé x druhú súradnicu, $y_1 = 4$, $y_2 = -4$.
Stacionárne body v možnosti b, sú teda $C = [3, 4]$ a $D = [-3, -4]$.

Funkcia f má štyri stacionárne body.

Všimnime si, že v príklade sme riešili dve nelineárne rovnice o dvoch neznámych. To môže byť vo všeobecnosti ťažká úloha.

Tiež poznamenajme, že zatiaľ nevieme, či niektorý z bodov A, B, C, D je bodom lokálneho extrému alebo nie, vieme ale, že funkcia f nikde inde lokálne extrémy nemôže mať.

Rozhodovanie o tom, či stacionárny bod je aj bodom lokálneho extrému alebo nie, je pre diferencovateľnú funkciu jednej premennej pomerne jednoduché, stačí testovať rastúcosť a klesajúcosť na vhodnom intervale pred a za stacionárnym bodom.
To v prípade funkcie viac premenných nie je možné.
(Naozaj? Skúste porozmýšľať či by to nejako nešlo.)

Na testovanie využijeme druhý diferenciál.
Pripomeňme najprv, ako vyzerá Taylorov polynóm druhého stupňa funkcie f v bode a.

$$T_2 f(a, h, k) = f(a) + d^1 f(a, h, k) + \frac{1}{2} d^2 f(a, h, k).$$

Ak a je stacionárny bod, tak $f'_x(a) = f'_y(a) = 0$ a teda

$$d^1 f(a, h, k) = 0.$$

V stacionárnom bode teda

$$T_2 f(a, h, k) = f(a) + \frac{1}{2} d^2 f(a, h, k).$$

Ak má f v stacionárnom bode a (ostré) lokálne minimum, tak k hodnote $f(a)$ treba niečo kladné pridať, a teda výraz $\dfrac{1}{2} d^2 f(a, h, k)$ musí byť kladný pre každú dvojicu h, k okrem $(h, k) = (0, 0)$.
Analogicky pre (ostré) lokálne maximum v stacionárnom bode a musí byť výraz $\dfrac{1}{2} d^2 f(a, h, k)$ záporný pre každé h, k okrem $(h, k) = (0, 0)$.

Ak výraz $\frac{1}{2}d^2 f(a, h, k)$ mení znamienko, tak v stacionárnom bode a nie je lokálny extrém.

(V hore uvedenej argumentácii potajomky využívame, že Taylorov polynóm $T^2 f$ dostatočne dobre aproximuje funkciu f.)

Definícia. Nech $f : A \subset R^2 \to R$ je dvakrát diferencovateľná funkcia na množine A a nech bod $a = [x_0, y_0] \in A$. Druhý diferenciál $d^2 f(a, h, k)$ funkcie f, voláme

- **kladne definitný** v bode a, ak $\forall (h, k) \neq (0, 0)$ je $d^2 f(a, h, k) > 0$,
- **záporne definitný** v bode a, ak $\forall (h, k) \neq (0, 0)$ je $d^2 f(a, h, k) < 0$,
- **indefinitný** v bode a, ak $\exists (h_1, k_1)$ také, že $d^2 f(a, h_1, k_1) > 0$ a $\exists (h_2, k_2)$ také, že $d^2 f(a, h_2, k_2) < 0$.

Definícia. Stacionárny bod $a = [x_0, y_0]$, v ktorom funkcia f nemá lokálny extrém voláme **sedlový bod**.

Sedlový bod si predstavujeme, v zhode s jeho pomenovaním, ako sedlo medzi dvoma kopcami. Terén sa na dve stany dvíha a na dve strany klesá.

Typický príklad sedlového bodu je bod $[0, 0]$ pre funkciu $f(x, y) = x^2 - y^2$. Graf tejto funkcie sa volá hyperbolický paraboloid.

Veta o postačujúcej podmienke.

Nech $f : A \subset R^2 \to R$ je dvakrát diferencovateľná funkcia na množine A a nech bod $a = [x_0, y_0]$ je stacionárny bod.

Ak druhý diferenciál funkcie f, $d^2 f(a, h, k) = f''_{xx}(a)h^2 + 2f''_{xy}(a)hk + f''_{yy}(a)k^2$, je

- *kladne definitný, tak bod a je bod ostrého lokálneho minima,*
- *záporne definitný, tak bod a je bod ostrého lokálneho maxima,*
- *indefinitný, tak bod a je sedlový bod.*

Príklad 2.

Pokračujme v príklade 1 a rozhodnime, ktoré stacionárne body funkcie

$$f(x, y) = 2x^3 + 6xy^2 - 3y^3 - 150x$$

sú bodmi lokálneho extrému.

V príklade 1 sme našli štyri stacionárne body, a to $A = [5, 0]$, $B = [-5, 0]$, $C = [3, 4]$ a $D = [-3, -4]$.

Pomocou druhého diferenciálu rozhodneme, v ktorom z nich má funkcia f lokálny extrém.

Druhé parciálne derivácie f sú:

$$\begin{aligned} f''_{xx} &= 12x, \\ f''_{xy} &= 12y = f''_{yx}, \\ f''_{yy} &= 12x - 18y. \end{aligned}$$

Ich hodnoty v bode A sú:

$$f''_{xx}(A) = 60,$$
$$f''_{xy}(A) = 0 = f''_{yx}(A),$$
$$f''_{yy}(A) = 60.$$

Druhý diferenciál v bode A je

$$d^2f(A,h,k) = 60 \cdot h^2 + 60 \cdot k^2 > 0, \qquad pre \quad (h,k) \neq (0,0),$$

a teda je kladne definitný. Bod A je bodom ostrého lokálneho minima.

Podobne druhý diferenciál v bode B je

$$d^2f(B,h,k) = -60 \cdot h^2 - 60 \cdot k^2$$

záporne definitný. Bod B je bodom ostrého lokálneho maxima.

Druhý diferenciál v bode C je

$$d^2f(C,h,k) = 36 \cdot h^2 + 96 \cdot hk - 36 \cdot k^2.$$

Ak zvolíme $h = 1$ a $k = 0$, tak $d^2f(C,1,0) = 36 > 0$, a
ak zvolíme $h = 0$ a $k = 1$, tak $d^2f(C,0,1) = -36 < 0$,
a teda $d^2f(C,h,k)$ je indefinitný. Bod C je sedlový bod.

Podobne druhý diferenciál v bode D je

$$d^2f(D,h,k) = -36 \cdot h^2 - 96 \cdot hk + 36 \cdot k^2.$$

Ak zvolíme $h = 1$ a $k = 0$, tak $d^2f(D,1,0) = -36 > 0$, a
ak zvolíme $h = 0$ a $k = 1$, tak $d^2f(D,0,1) = 36 < 0$,
a teda $d^2f(D,h,k)$ je indefinitný. Bod D je tiež sedlový bod.

Záver: Funkcia f má ostré lokálne minimum v bode A, $f(A) = -500$ a ostré lokálne maximum v bode B, $f(B) = 500$.

Uvažujme teraz trochu o definitnosti druhého diferenciálu. Označme druhé parciálne derivácie ako konštanty $b = f''_{xx}(a)$, $c = f''_{xy}(a)$, $d = f''_{yy}(a)$.

Druhý diferenciál má podobu

$$d^2f(a,h,k) = b \cdot h^2 + 2c \cdot hk + d \cdot k^2.$$

Predpokladajme, že $b \neq 0$. Upravme

$$d^2f(a,h,k) = b\left(h^2 + 2\frac{c}{b} \cdot hk + \frac{d}{b} \cdot k^2\right).$$

Doplnením na úplný štvorec dostaneme

$$d^2f(a,h,k) = b\left((h + \frac{c}{b}k)^2 + \frac{d}{b} \cdot k^2 - \left(\frac{c}{b}\right)^2 k^2\right) = b \cdot \left(h + \frac{c}{b}k\right)^2 + \frac{bd - c^2}{b} \cdot k^2$$

Ak sú oba koeficienty pri druhých mocninách kladné, t.j. $b > 0$ aj $bd - c^2 > 0$, tak je druhý diferenciál kladne definitný.

Ak sú oba koeficienty pri druhých mocninách záporné, t.j. $b < 0$ a $bd - c^2 > 0$ (pretože menovateľ je záporný), tak je druhý diferenciál záporne definitný.

Ak je $bd - c^2 < 0$, tak bez ohľadu na znamienko b majú koeficienty pri druhých mocninách opačné znamienka a druhý diferenciál je indefinitný.

Na pomoc si vezmime maticu druhých parciálnych derivácií

$$\begin{pmatrix} b & c \\ c & d \end{pmatrix}$$

V nej je b číslo v prvom riadku a prvom stĺpci a $bd - c^2$ je jej determinant.

Veta. Sylvestrovo kritérium.

Nech $f : A \subset R^2 \to R$ je dvakrát diferencovateľná funkcia na množine A a nech bod $a = [x_0, y_0]$ je stacionárny bod. Nech

$$M = \begin{pmatrix} f''_{xx}(a) & f''_{xy}(a) \\ f''_{yx}(a) & f''_{yy}(a) \end{pmatrix}.$$

Označme

$$d_1 = f''_{xx}(a)$$

$$d_2 = \det M.$$

Ak

- $d_1 > 0$, $d_2 > 0$, *tak bod a je bod ostrého lokálneho minima,*
- $d_1 < 0$, $d_2 > 0$, *tak bod a je bod ostrého lokálneho maxima,*
- $d_2 < 0$, *tak bod a je sedlový bod.*

Ak nenastane ani jedna z troch možností vety, tak pomocou Sylvestrovho kritéria nevieme rozhodnúť.

Príklad 3.

Nájdime body lokálnych extrémov funkcie

$$f(x, y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}.$$

Použijeme nutnú podmienku na hľadanie stacionárnych bodov:

$$f'_x = y - \frac{50}{x^2},$$

$$f'_y = x - \frac{20}{y^2}.$$

Riešme sústavu

$$
\begin{aligned}
y - \frac{50}{x^2} &= 0,\\
x - \frac{20}{y^2} &= 0.
\end{aligned}
$$

Z rovníc je jasné, že x aj y musia byť kladné. Vyjadrením $y = \dfrac{50}{x^2}$ z prvej rovnice a dosadením do druhej dostaneme

$$x = \frac{20}{50^2}\, x^4.$$

Posledná rovnica má riešenia $x_1 = 0$ a $x_2 = 5$. Pretože body s nulovou súradnicou nepatria do definičného oboru, funkcia f má jediný stacionárny bod, ktorého druhú súradnicu y dopočítame z prvej rovnice

$$A = [5, 2].$$

Druhé parciálne derivácie f sú:

$$
\begin{aligned}
f''_{xx} &= \frac{100}{x^3},\\
f''_{xy} &= 1 = f''_{yx},\\
f''_{yy} &= \frac{40}{y^3}.
\end{aligned}
$$

Ich hodnoty v bode A sú:

$$
\begin{aligned}
f''_{xx}(A) &= \frac{100}{125} = \frac{4}{5},\\
f''_{xy}(A) &= 1 = f''_{yx}(A),\\
f''_{yy}(A) &= \frac{40}{8} = 5.
\end{aligned}
$$

Matica

$$M = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

a

$$
\begin{aligned}
d_1 &= \frac{4}{5} > 0\\
d_2 &= \det M = 3 > 0.
\end{aligned}
$$

Podľa Sylvestrovho kritéria je bod A bodom ostrého lokálneho minima. Jeho hodnota je $f(5, 2) = 30$.

Na záver tejto kapitoly sa budeme zaoberať lokálnymi extrémami funkcie troch premenných.

Všetky definície a tvrdenia uvedené pre funkcie dvoch premenných zostávajú rovnaké aj pre tri a viac premenných. Nebudeme ich preformulovávať do všeobecnej podoby.

Uvedieme len maticové kritérium pre testovanie stacionárnych bodov.

Veta. Sylvestrovo kritérium v R^3.

Nech $f : A \subset R^3 \to R$ je dvakrát diferencovateľná funkcia na množine A a nech bod $a = [x_0, y_0, z_0]$ je stacionárny bod. Nech

$$M = \begin{pmatrix} f''_{xx}(a) & f''_{xy}(a) & f''_{xz}(a) \\ f''_{yx}(a) & f''_{yy}(a) & f''_{yz}(a) \\ f''_{zx}(a) & f''_{zy}(a) & f''_{zz}(a) \end{pmatrix}$$

Označme

$$\begin{aligned} d_1 &= f''_{xx}(a), \\ d_2 &= \det \begin{pmatrix} f''_{xx}(a) & f''_{xy}(a) \\ f''_{yx}(a) & f''_{yy}(a) \end{pmatrix}, \\ d_3 &= \det M. \end{aligned}$$

Ak

- $d_1 > 0$, $d_2 > 0$, $d_3 > 0$, *tak bod a je bod ostrého lokálneho minima,*
- $d_1 < 0$, $d_2 > 0$, $d_3 < 0$, *tak bod a je bod ostrého lokálneho maxima,*
- $d_2 < 0$, *tak bod a nie je bod lokálneho extrému, teda je sedlový bod.*
- $d_i \neq 0$, *a znamienka sa striedajú inak, ako v prvých dvoch prípadoch, tak bod a nie je bod lokálneho extrému.*

Poznamenajme, že štvrtá položka je v istom zmysle nadbytočná, vhodným premenovaním premnenných x, y, z sa dá vždy previesť na tretí prípad.

Postup pri hľadaní lokálnych extrémov funkcie troch premenných ukážeme na príklade.

Príklad 4.

Nájdime body lokálnych extrémov funkcie

$$f(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^2 + yz - z + y - 3x + 3.$$

Použijeme nutnú podmienku na hľadanie stacionárnych bodov a položíme prvé parciálne derivácie rovné nule:

$$\begin{aligned} f'_x &= 3x^2 - 3 = 0, \\ f'_y &= 2y + z + 1 = 0, \\ f'_z &= 2z + y - 1 = 0. \end{aligned}$$

Riešme sústavu troch rovníc o troch neznámych. Prvá rovnica má riešenie $x_1 = 1$, $x_2 = -1$.
Sústava druhej a tretej rovnice má jediné riešenie $(y, z) = (-1, 1)$.
Teda funkcia f má dva stacionárne body a to

$$\begin{aligned} A &= [1, -1, 1], \\ B &= [-1, -1, 1]. \end{aligned}$$

Druhé parciálne derivácie f sú:

$$\begin{aligned} f''_{xx} = 6x, \quad f''_{xy} &= 0 = f''_{yx}, \quad f''_{xz} = 0 = f''_{zx} \\ f''_{yy} &= 2, \quad f''_{yz} = 1 = f''_{zy}, \\ & \qquad\quad f''_{zz} = 2. \end{aligned}$$

Ich hodnoty v bode A sú:

$$\begin{aligned} f''_{xx} = 6, \quad f''_{xy} &= 0 = f''_{yx}, \quad f''_{xz} = 0 = f''_{zx} \\ f''_{yy} &= 2, \qquad\quad f''_{yz} = 1 = f''_{zy}, \\ & \qquad\qquad\quad f''_{zz} = 2. \end{aligned}$$

Matica

$$M(A) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a

$$\begin{aligned} d_1 &= 6 > 0, \\ d_2 &= \det \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 12 > 0, \\ d_3 &= \det M(A) = 18 > 0. \end{aligned}$$

Podľa Sylvestrovho kritéria je bod A bodom ostrého lokálneho minima. Jeho hodnota je $f(1, -1, 1) = 0$.

To isté opakujeme v bode B. Hodnoty druhých derivácií v bode B sú:

$$\begin{aligned} f''_{xx} = -6, \quad f''_{xy} &= 0 = f''_{yx}, \quad f''_{xz} = 0 = f''_{zx} \\ f''_{yy} &= 2, \qquad\quad f''_{yz} = 1 = f''_{zy}, \\ & \qquad\qquad\quad f''_{zz} = 2. \end{aligned}$$

Matica

$$M(B) = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vypočítajme

$$
\begin{aligned}
d_1 &= -6 < 0, \\
d_2 &= \det \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = -12 < 0, \\
d_3 &= \det M(B) = -18 < 0.
\end{aligned}
$$

Podľa Sylvestrovho kritéria je bod B sedlový bod.

Zdôraznime, že $d_1 < 0$, $d_2 < 0$, $d_3 < 0$ znamená, že stacionárny bod je sedlový bod. Na to stačí, aby $d_2 < 0$ bez ohľadu na znamienka d_1, d_3.