PREDNÁŠKA 2.

Byť zmätený je ideálny stav mysle pre matematika, boj o vyslobodenie z tohto stavu je hlavnou hnacou silou pokroku. (Dror Bar-Natan)

Limita a spojitosť.

Ako aj názov prezrádza, budeme rozprávať o limite a o spojitosti skalárnej funkcie viacerých premenných. Ak aj budeme hovoriť o funkciách n premenných, pod počtom n si môžete predstaviť konkrétne dve premenné. Pri väčšom počte premenných sa komplikuje geometrická predstava, ale základné princípy zostávajú zachované.

Pod spojitou plochou si predstavujeme plochu, ktorá nemá žiadnu dieru ani žiadnu trhlinu. K tejto intuitívne popísanej globálnej predstave o spojitosti sa prepracujeme pomocou dvoch lokálnych pojmov, limity a spojitosti v bode.

Pretože limita funkcie a aj jej spojitosť v bode $\bar{x}_0$ definičného oboru $A \subset R^n$ nie je ovplyvnená celou funkciou, ale len jej chovaním v okolí bodu $\bar{x}_0$, skúsme najprv povedať, čo rozumieme pod týmto pojmom.

Okolie bodu $\bar{x}_0$ v n- rozmernom priestore R^n je množina bodov, ktoré sú od bodu $\bar{x}_0$ vzdialené menej ako daná kladná konštanta δ. Číslo δ meria veľkosť okolia.

Zapisujeme

$$O_\delta(\bar{x}_0) = \{\bar{x} \in R^n;\ |\bar{x} - \bar{x}_0| < \delta\}.$$

Ak by bolo $n = 1$, dostaneme už dobre známe okolie v R, otvorený interval

$$O_\delta(\bar{x}_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Pre $n = 2$ je δ okolím bodu $\bar{x}_0$ otvorený kruh s polomerom δ a stredom v bode $\bar{x}_0$.

Aby sme mohli uvažovať o limite funkcie v bode $\bar{x}_0$, musí byť funkcia v ľubovoľnej blízkosti bodu $\bar{x}_0$ definovaná. Takýto bod $\bar{x}_0$ nazývame hromadný bod definičného oboru.

Bod $\bar{x}_0$ je hromadný bod definičného oboru A funkcie f, ak pre každé $\delta > 0$ existuje $\bar{x} \in A$, $\bar{x} \neq \bar{x}_0$ ležiace v $O_\delta(\bar{x}_0)$. Ak uvažujeme len o bodoch okolia rôznych od jeho stredu, používame skratku $O^\circ_\delta(\bar{x}_0) = O^\circ_\delta(\bar{x}_0) - \{\bar{x}_0\}$.

Definícia. Nech $f : A \subseteq R^n \to R$, a nech $\bar{x}_0$ je hromadný bod množiny A. Hovoríme, že funkcia f má v bode $\bar{x}_0$ limitu $L \in R^*$, ak pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $O^\circ_\delta(\bar{x}_0)$, také, že

$$\bar{x} \in O^\circ_\delta(\bar{x}_0) \ \Rightarrow\ f(\bar{x}) \in O_\varepsilon(L).$$

Značíme

$$\lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} f(\bar{x}) = L.$$

Pojem limity úzko súvisí s pojmom spojitosti funkcie v bode.

Definícia. Nech $A \subseteq R^n$ a nech $f : A \to R$, a nech $\bar{x}_0 \in A$. Hovoríme, že funkcia f je v bode $\bar{x}_0$ spojitá, ak

$$\lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} f(\bar{x}) = f(\bar{x}_0).$$

V pojme limity riešime otázku, či na základe chovania funkcie v okolí bodu $\bar{x}_0$ vieme urobiť rozumnú predpoveď o chovaní funkcie v samotnom bode $\bar{x}_0$.

Pojem spojitosti funkcie v bode zase odpovedá na otázku, či sa táto predpoveď naplnila.

Pôvodnú predstavu o nepretrhnutej ploche zachytáva táto definícia.

Definícia. Nech $A \subseteq R^n$ a nech $f : A \to R$. Ak je funkcia f spojitá v každom bode množiny A, hovoríme, že funkcia f je **spojitá na množine** A.

Príklad 1.

Je daná konštantná funkcia $f : R^2 \to R$,

$$f(x, y) = c.$$

Vypočítajme jej limitu v niektorom bode z jej $D_f = R^2$ a zistime, kde je konštantná funkcia spojitá.

Riešenie. Pretože pre každé $O_\delta^\circ(\bar{x}_0)$, a každé $\bar{x} \in O_\delta^\circ(\bar{x}_0)$ je hodnota $f(\bar{x}) = c$, je

$$\lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} f(\bar{x}) = c$$

v každom bode $\bar{x}_0 \in R^2$.

Súčasne je aj

$$f(\bar{x}_0) = c.$$

Konštantná funkcia je spojitá v každom bode definičného oboru a teda je spojitá na R^2.

Príklad 2.

Je daná funkcia $f : R^2 \to R$ predpisom,

$$f(x, y) = x.$$

Vypočítajme jej limitu v niektorom bode z jej $D_f = R^2$ a zistime, kde je spojitá.

Riešenie. Označíme $\bar{x} = (x, y)$ a $\bar{x}_0 = (x_0, y_0)$. Zvoľme $\delta = \varepsilon$.

Teraz pre $\varepsilon > 0$ a $O_{\delta=\varepsilon}^\circ(\bar{x}_0)$, a každé $\bar{x} \in O_\delta^\circ(\bar{x}_0)$ je hodnota $f(\bar{x}) = f(x, y) = x$, pričom $|x - x_0| < \varepsilon$.

Preto

$$\lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} f(\bar{x}) = \lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} x = x_0$$

v každom bode $\bar{x}_0 \in R^2$.

Súčasne je aj

$$f(\bar{x}_0) = x_0.$$

Funkcia f je spojitá v každom bode definičného oboru a teda je spojitá na R^2.

Funkciu z príkladu 2 nazývame projekcia na prvú súradnicu. Analogicky definujeme projekciu na druhú a prípadne ďalšie súradnice.

Aby sme nemuseli v každej úlohe používať definíciu, uvedieme vetu o počítaní s limitami. Jej znenie je formálne rovnaké, ako v prípade vlastnej limity funkcie jednej premennej.

Veta. *Nech $f : A \subseteq R^n \to R$, $g : A \subseteq R^n \to R$ a nech existujú vlastné limity*

$\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{x}_0} f(\bar{x}) = L_1$, $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{x}_0} g(\bar{x}) = L_2$.

Potom

$$\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} f(\bar{x}) + g(\bar{x}) = L_1 + L_2,$$

$$\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} f(\bar{x}) \cdot g(\bar{x}) = L_1 \cdot L_2,$$

ak naviac $L_2 \neq 0$, tak $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{x}_0} \dfrac{f(\bar{x})}{g(\bar{x})} = \dfrac{L_1}{L_2}$.

Prerozprávaním do reči spojitosti dostávame nasledujúci dôsledok.

Dôsledok. *Súčet, súčin, podiel spojitých funkcií je spojitá funkcia všade tam, kde je príslušná operácia definovaná.*

Príklad 3.

Polynóm $f : R^2 \to R$ daný predpisom,

$$f(x, y) = 1 - x + 2y + x^2 - 3xy + 2y^2$$

je spojitá funkcia na R^2.

Tvrdenie vyplýva zo spojitosti konštantnej funkcie a projekcií, z vyššie uvedenej vety a jej dôsledku.

Pri funkciách jednej premennej sa k bodu x_0, v ktorom sme počítali limitu, dalo blížiť z dvoch rôznych strán, hovorili sme o limite zľava a limite sprava.

Pre funkciu dvoch a viacerých premenných máme zrazu skokom z dvoch až nekonečne veľa spôsobov, ako sa blížiť k bodu $\bar{x}_0$. *(Zhora, zdola, po šikmých polpriamkach, po krivých čiarach...)*

Pre popis rôznych druhov blíženia sa využijeme pojem zúženia funkcie f na krivku popísanú spojitou a prostou funkciou $\varphi(t) : [0, T] \to R^n$. Pritom budeme uvažovať o limite pre $t \to 0$, preto požadujeme aby $\varphi(0) = \bar{x}_0$.

Nasledujúca veta hovorí, že ak má funkcia v bode $\bar{x}_0$ limitu, tak rovnakú limitu má v tomto bode aj každé jej zúženie.

Dôsledok potom tvrdí to isté len v negatívnej formulácii (obmenená implikácia), ak dve rôzne zúženia vedú k rôznym limitám, tak pôvodná funkcia limitu nemá.

Veta. *Nech $A \subseteq R^n$ a nech $f : A \to R$. Nech existuje limita* $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{x}_0} f(\bar{x}) = L$.

Nech $\varphi(t) : [0, T] \to R^n$ je spojitá funkcia a $\varphi(0) = \bar{x}_0$.

Potom aj limita funkcie jednej premennej $f(\varphi(t))$ má limitu

$$\lim_{t\to 0} f(\varphi(t)) = L.$$

Dôsledok. *Nech $A \subseteq R^n$ a nech $f : A \to R$.*

Ak $\varphi_1(t), \varphi_2(t) : [0,T] \to R^n$ sú spojité funkcie, $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \bar{x}_0$ a

$$\lim_{t\to 0} f(\varphi_1(t)) \neq \lim_{t\to 0} f(\varphi_2(t)),$$

tak

$$\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} f(\bar{x}) \text{ neexistuje.}$$

Príklad 4.

Dokážte, že funkcia

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

nemá limitu v bode $[0,0]$.

Riešenie. Uvažujme zúženie funkcie f na krivku popísanú funkciou $\varphi_1(t) = (t,0)$.

$$\lim_{t\to 0} f(\varphi_1(t)) = \lim_{t\to 0} \frac{t\cdot 0}{t^2+0^2} = 0.$$

Iné zúženie na krivku popísanú funkciou $\varphi_2(t) = (t,t)$ dáva výsledok

$$\lim_{t\to 0} f(\varphi_2(t)) = \lim_{t\to 0} \frac{t\cdot t}{t^2+t^2} = \frac{1}{2}.$$

Preto

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} \text{ neexistuje.}$$

Príklad 5.

Vypočítajme limitu

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}.$$

Riešenie. Zúženie funkcie f na krivku popísanú funkciou $\varphi_1(t) = (t,0)$ vedie k

$$\lim_{t\to 0} f(\varphi_1(t)) = \lim_{t\to 0} \frac{t\cdot 0}{t^2+0^4} = 0.$$

Zúženie na krivku popísanú funkciou $\varphi_2(t) = (t,t)$ dáva výsledok

$$\lim_{t\to 0} f(\varphi_2(t)) = \lim_{t\to 0} \frac{t\cdot t^2}{t^2+t^4} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{1+t^2} = 0.$$

Tu je dôležité premyslieť si, že z rovnakých výsledkov pre dve rôzne zúženia nevieme o pôvodnej limite nič! *(alebo skoro nič.)*

Možno je nula naozaj správny výsledok, ale možno tretie zúženie vedie k inej limite a pôvodná limita neexistuje. *(Vieme len toľko, že iný výsledok ako nula nemôže limita mať, ale to sme vedeli už po prvom zúžení.)*

Skúsme zúženie na krivku popísanú funkciou $\varphi_3(t) = (t^2,t)$ (bude užitočné premyslieť si, prečo práve toto zúženie)

$$\lim_{t\to 0} f(\varphi_3(t)) = \lim_{t\to 0} \frac{t^2\cdot t^2}{t^4+t^4} = \lim_{t\to 0} \frac{t^4}{2t^4} = \frac{1}{2}.$$

Preto

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4} \text{ neexistuje.}$$

Príklad 6.
Vypočítajme limitu

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2}.$$

Teraz si dajte v čítaní jeden deň prestávku a predstavte si, že autor textu sa celý ten deň pokúša nájsť dve zúženia, ktoré dajú rôzne výsledky limity. Neúspešne.

Postupom pomocou zúžení sa dá dokázať, že limita neexistuje, ale nedá sa v konečnom čase dospieť k pozitívnemu výsledku. (*Filozofi matematiky hovoria, že ani v nekonečnom, ale to ešte nemám overené.*)

Uvedieme ďalší nástroj na počítanie limít, vetu o porovnaní a jej dôsledok.

Veta o porovnaní. *Nech $A \subseteq R^n$ a nech $f : A \to R$, $g : A \to R$, $h : A \to R$, pričom*

$$f(\bar{x}) \le g(\bar{x}) \le h(\bar{x}).$$

Nech existujú limity

$$\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} f(\bar{x}) = \lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} h(\bar{x}) = L.$$

Potom aj

$$\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} g(\bar{x}) = L.$$

Dôsledok. *Nech $A \subseteq R^n$ a nech $f : A \to R$, $g : A \to R$.*
Nech

$$\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} f(\bar{x}) = 0,$$

a nech funkcia g je ohraničená na A.
Potom

$$\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} f(\bar{x})g(\bar{x}) = 0.$$

Príklad 6. (na druhý deň)
Vypočítajme limitu

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2}.$$

Riešenie.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x\ \frac{y^2}{x^2+y^2}.$$

Pritom

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x = 0,$$

a platí nerovnosť

$$0 \leq \frac{y^2}{x^2+y^2} \leq 1,$$

ktorá ukazuje, že funkcia $\frac{y^2}{x^2+y^2}$ je ohraničená.

Preto

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x\ \frac{y^2}{x^2+y^2} = 0.$$

Môžeme ešte dopovedať, že výsledok predošlého príkladu znamená, že funkcia

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{pre } [x,y] \neq [0,0] \\ 0 & \text{pre } [x,y] = [0,0] \end{cases}$$

je spojitá v bode $[0,0]$ a aj na celom svojom definičnom obore R^2. *(Spojitosť v bode* $[0,0]$ *vyplýva z príkladu 6, spojitosť v ostatných bodoch z Dôsledku o spojitosti funkcií pri elementárnych operáciách s nimi.)*