Funkcie ($D(f)$, f^{-1}, $g\circ f$).

1. Určte definičný obor funkcií:

$$\begin{aligned} f_1(x) =& \ln\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}\right)\\ f_2(x) =& \sqrt{2\cos x-\sqrt{3}}\\ f_3(x) =& \arcsin\frac{x+2}{x-1}\\ f_4(x) =& \frac{x}{\ln\left(x^2-1\right)}\\ f_5(x) =& \frac{x}{\ln(3-x)}+\ln(4x-x^2). \end{aligned}$$

2. Určte definičný obor funkcie a zistite, či je f párna alebo nepárna.

a) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$,

b) $f(x)=\dfrac{4}{1+\sqrt{x^2-4}}$.

3. Určte $D(f)$ a nájdite inverznú funkciu k funkcii f.

a) $f(x)=\pi+\arcsin(2x+1)$,

b) $f(x)=\sqrt{\ln(x+1)}$

4. Dané sú funkcie f a g. Určte definičné obory a obory hodnôt funkcií f a g. Nájdite také zúženie funkcie f, aby existovala zložená funkcia $g\circ f|_A$ a určte ju.

a) $f(x)=\dfrac{x+2}{x-1}$, $\quad g(x)=\sqrt{1-x^2}$,

b) $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$, $\quad g(x)=\ln(x-2)$,

c) $f(x)=x^2-x-1$, $\quad g(x)=\arccos x$.

Výsledky.

1. $D(f_1)=(3,4\rangle$, $D(f_2)=\bigcup\limits_{k\in N}\langle -\frac{\pi}{6}+2k\pi, \frac{\pi}{6}+2k\pi\rangle$, $D(f_3)=(-\infty,-\frac{1}{2}\rangle$, $D(f_4)=(-\infty,-\sqrt{2})\cup(-\sqrt{2},-1)\cup(1,\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},\infty)$, $D(f_5)=(0,2)\cup(2,3)$.

2.a) $D(f)=(-2,2)$, nepárna, 2.b) $D(f)=(-\infty,-2\rangle\cup\langle 2,\infty)$, párna.

3.a) $D(f)=\langle -1,0\rangle$, $f^{-1}(x)=\frac{1}{2}(-\sin x-1)$,

3.b) $D(f)=\langle 0,\infty)$, $f^{-1}(x)=e^{x^2}-1$.

4.a) $A=(-\infty,-\frac{1}{2}\rangle$, $(g\circ f|_A)(x)=\sqrt{1-\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2}$,

4. b) $A=(-2,-1)$, $(g\circ f|_A)(x)=\ln\left(\frac{-x-2}{x+1}\right)$,

4. c) $A=\langle -1,0\rangle\cup\langle 1,2\rangle$, $(g\circ f|_A)(x)=\arccos\left(x^2-x-1\right)$.

Limity a derivácie funkcií.

1. Vypočítajte limity v krajných bodoch definičného oboru a načrtnite graf funkcie.

a) $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$,

b) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+x-2}$,

c) $f(x)=\dfrac{1}{\ln(1-x)}$.

2. Vypočítajte limity funkcií.

a) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x+2}{x^2+x-2}$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\cos 2x}{x^2-1}$.

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin 2x}{\sqrt{x}}$.

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x+3}}$.

e) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sin 5x}$.

f) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin 3x}{x}$, $\quad a=0,\infty$

g) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+4}-\sqrt{x}\right)$.

h) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{(x-\pi)^2}{\operatorname{tg} 2x}$.

3. Zistite $D(f)$, množinu bodov, v ktorých je f spojitá a množinu bodov, v ktorých $\exists$ derivácia f. Vypočítajte f^{-1}.

a) $f(x)=\dfrac{\sin x-\cos x}{\sin x}$,

b) $f(x)=\left(x^2-2x\right)e^x\ln x$,

c) $f(x)=\dfrac{(x+1)e^x}{x}$,

d) $f(x)=\sqrt{x^2+2x-35}$,

e) $f(x)=\operatorname{arctg}\sqrt{x^2+4}$,

f) $f(x)=\operatorname{arcotg}\dfrac{1}{\sqrt{x}}$,

g) $f(x)=\dfrac{\ln(x^2+1)}{\sqrt{x}}$.

Výsledky.

1a) $\lim_{x\to-\infty}f(x)=1/2$, $\lim_{x\to\infty}f(x)=1/2$, $\lim_{x\to0^+}f(x)=0$, $\lim_{x\to0^-}f(x)=1$,

1b) $\lim_{x\to1^+}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to1^-}f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to-2^+}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to-2^-}f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$,

1c) $\lim_{x\to1^-}f(x)=0$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$,

2a) $-1/3$, 2b) 0, 2c) 0, 2d) ∞, 2e) $1/20$, 2f) 3, 0, 2g) 0, 2h) 0

3a) $D(f)=D(f')=R\setminus\{k\pi,k\in Z\}$, $f'(x)=\frac{1}{\sin^2 x}$,

3b) $D(f)=D(f')=(0,\infty)$, $f'(x)=e^x\left[(x^2-2)\ln x+\frac{1}{x}\right]$,

3c) $D(f)=D(f')=R\setminus\{0\}$, $f'(x)=\frac{e^x(x^2+x-1)}{x^2}$,

3d) $D(f)=(-\infty,-7\rangle\cup\langle 5,\infty)$, $D(f')=(-\infty,-7)\cup(5,\infty)f'(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-35}}$, 3e) $D(f)=D(f')=R$, $f'(x)=\frac{x}{(x^2+5)\sqrt{x^2+4}}$,

3f) $D(f)=D(f')=(0,\infty)$, $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}(x+1)}$,

3g) $D(f)=D(f')=(0,\infty)$, $f'(x)=\frac{2\sqrt{x}}{x^2+1}+\frac{\ln(x^2+1)}{2x\sqrt{x}}$.

4a) $t\colon y-2=-(x-3)$, $n\colon y-2=(x-3)$, 4b) $t\colon y=-x$, $n\colon y=x$, 4c) $t\colon y=-x$, $n\colon y=x$.

1. Nájdite rovnicu dotyčnice a normály ku grafu funkcie v bode $(a, f(a))$.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x-2} + 1\,,\ a = 3$

b) $f(x) = e^{-x} \cos 2x\,,\ a = 0\,.$

c) $f(x) = e^{x^2} \ln(1-x)\,,\ a = 0\,.$

2. Vyšetrite monotónnosť a nájdite lokálne extrémy funkcie.

a) $f(x) = x^4 - 18x^2 + 9\,,$

b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - x - 2}\,,$

c) $f(x) = e^{(x^2+1)}\,,$

d) $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}\,.$

3. Nájdite asymptoty funkcie.

a) $f(x) = x - \operatorname{arctg} x\,,$

b) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - x - 2}\,,$

c) $f(x) = (x+3)e^{-x-1}\,,$

d) $f(x) = \dfrac{\ln(1-x)}{2x}\,.$

4. Vypočítajte limity

a) $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{x^5+1}{x^4-1}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x-3}{e^x}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x \sin \tfrac{1}{x}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cos \frac{1}{x}}{\sin x}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x+\cos x}{x-\cos x}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{\sin 4x}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{xe^x - x}{\ln(1-x^2)}$

5. Vypočítajte limity

a) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} (x+1)e^x$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} \ln x$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \left(\operatorname{cotg} x - \tfrac{1}{x}\right)$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\operatorname{cotg}^2 x}$

6. Vyšetrite priebeh funkcie a načrtnite jej graf (D(f), nulové body, spojitosť, párnosť, nepárnosť, periodičnosť, asymptoty, intervaly monotónnosti, konvexnosti a konkávnosti, lokálne extrémy, inflexné body, graf obor hodnôt)

a) $f(x) = x^3 - 3x$

b) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

c) $f(x) = x - 1 + \dfrac{1}{x+1}$

d) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$

e) $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$

f) $f(x) = \dfrac{e^x}{x+1}$

g) $f(x) = x - 2\operatorname{arctg} x$

h) $f(x) = (x+2)e^{-x}\,.$

Výsledky: 1a) $t\colon y-2 = -(x-3)\,,\ n\colon y-2 = (x-3)\,,$ 1b),c) $t\colon y = -x\,,\ n\colon y = x\,.$ 2a) na $(-\infty,-3\rangle$ a $\langle 0,3\rangle$ klesajúca, na $\langle -3,0\rangle\,,\ \langle ,\infty)$ rastúca, ostré l.min. $f(-3) = f(3) = -72\,,$ o.l.max. $f(0) = 9\,;$ b) Na $(-\infty,-1)\,,\ (-1,2)\,,\ (2,\infty)$ klesajúca, lokálne extrémy nem. c) na $(-\infty,0\rangle$ kles., na $\langle 0,\infty)$ rast., $f(0) = e$ o.l.min., d) na $(0,1),(1,e\rangle$ kles., na $\langle e,\infty)$ rast., $f(e) = e$ o.l.max., 3a) $y = x - \frac{\pi}{2}$v ∞, $y = x + \frac{\pi}{2}$v $-\infty$, 3b) $y = x+1$ v $-\infty$, $x = 2$, $x = -1\,,$ 3c) $y = 0$ v $\infty\,,$ 3d) $y = 0$ v $-\infty$, $x = 1\,,$ 4a) $-\frac{5}{4}\,,$ b) $0\,,$ c) $1\,,$ d) $0\,,$ e) 1 (nie je možné použiť L'Hospitalovo pravidlo!), 3f) $\frac{1}{4}\,,$ 3g) $-1\,,$ 5a) 0, 5b)0, 5c) 0, 5d) $e^{-\frac{1}{2}}\,.$ 6a) $D(f) = R$, nepárna, na $(-\infty,-1\rangle$ a $\langle 1,\infty)$ rastúca, na $\langle -1,1\rangle\,,$ klesajúca, o.l.min $f(1) = -2\,,$ o.l.max. $f(-1) = 2\,;$ na $(-\infty,0\rangle$ r. konkávna, na $\langle 0,\infty)$ r. konvexná, i. b. $x = 0\,,$ asymptoty nem; 6b) $D(f) = (0,\infty)$, na $(0,e\rangle$ a $\langle 1,\infty)$ rastúca, na $\langle e,\infty)\,,$ klesajúca, o.l.max. $f(e) = \frac{1}{e}\,;$ na $(0,\sqrt{e^3}\rangle$ r. konkávna, na $\langle\sqrt{e^3},\infty)$ r. konvexná, i. b. $x = \sqrt{e^3}$, asymptoty $x = 0$, $y = 0$; 6c) $D(f) = R \setminus \{-1\}$, na $(-\infty,-2\rangle$ a $\langle 0,\infty)$ rastúca, na $\langle -2,-1)$ a $(-1,0\rangle$ klesajúca, o.l.min $f(0) = 0\,,$ o.l.max. $f(-2) = -4\,;$ na $(-\infty,-1)$ r. konkávna, na $(-1,\infty)$ r. konvexná, i. b. nemá, asymptoty $x = -1$, $y = x-1$; 6d) $D(f) = R$, nepárna, na $(-\infty,-1\rangle$ a $\langle 1,\infty)$ klesajúca, na $\langle -1,1\rangle\,,$ rastúca, o.l.min $f(-1) = -\frac{1}{2}$, o.l.max. $f(1) = \frac{1}{2}\,;$ na $(-\infty,-\sqrt{3}\rangle$ a $\langle\sqrt{3},\infty)$ r. konvexná, na $\langle -\sqrt{3},\sqrt{3}\rangle$ r. konkávna, i. b. $x = \pm\sqrt{3}$, asymptota $y = 0$; 6e) $D(f) = R \setminus \{-1,1\}$, párna, na $(-\infty,-1)$ a $(-1,0\rangle$ klesajúca, na $\langle 0,1)$ a $(1,\infty)$ rastúca, o.l.min $f(0) = 1\,,$ na $(-\infty,-1)$ a $(1,\infty)$ r. konkávna, na $(-1,1)$ r. konvexn, i. b. nem, asymptoty $y = 0$, $x = \pm 1$; 6f) $D(f) = R \setminus \{-1\}$, na $(-\infty,-1)$ a $(-1,0\rangle$ klesajúca, na $\langle 0,\infty)$ rastúca, o.l.min $f(0) = 1\,,$ na $(-\infty,-1)$ r. konkvna, na $(-1,\infty)$ r. konvexn, i. b. nem, asymptoty $x = -1$; 6g) $D(f) = R$, na $(-\infty,-1\rangle$ a $\langle 1,\infty)$ rastúca, na $\langle -1,1\rangle$ klesajúca, o.l.min $f(1) = 1 - \frac{\pi}{2}\,,$ o.l.max $f(-1) = -1 + \frac{\pi}{2}\,,$ na $(-\infty,0\rangle$ r. konkávna, na $\langle 0,\infty)$ r. konvexná, i. b. $x = 0\,,$ asymptoty $y = x - \pi$ v $\infty\,,$ $y = x + \pi$ v $-\infty$; 6h) $D(f) = R\,,$ na $(-\infty,-1\rangle$ rastúca, na $\langle 1,\infty)$ klesajúca, o.l.max $f(-1) = e\,,$ na $(-\infty,0\rangle$ r. konkávna, na $\langle 0,\infty)$ r. konvexná, i. b. $x = 0\,,$ asymptoty $y = 0$ v $\infty\,.$