

M1 — PŘÍKLADY 1

1. KOMPLEXNÉ ČÍSLA

- Nájdite výsledok operácie v tvare $x+yi$, kde $x, y \in R$.
 - $3 + 7i - (5 - 2i)(4 - i)$
 - $i(1+i)(1-i)(1+2i)(1-2i)$
 - $\frac{(1-7i)}{(2+3i)}$
 - $\frac{a+bi}{a-bi}$, $a, b \in R$
 - $\frac{i(2+3i)}{3+5i}$
- Nájdite $x, y \in R$ také, e
 - $(2x + 3y) + i(x - y) = -1 + 2i$
 - $(ix + y)(2x - 3iy) = 2i$
 - $\frac{-y + ix}{1 - 2i} + \frac{x + iy}{2 + 3i} = 1$
- Dané komplexné číslo znázorníte a nájdite jeho goniometrický tvar.
 - -5
 - $1 - i$
 - $\sqrt{3} - i$
 - $-5i$
 - $2 + 3i$
 - $-3 - 7i$
- Vypočítajte $zu, \frac{z}{u}, z^n$.
 - $z = \sqrt{3}(\cos \frac{7\pi}{5} + i \sin \frac{7\pi}{5})$, $u = 2(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})$, $n = 5$
 - $z = 3(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$, $u = 6(\cos \frac{3\pi}{8} + i \sin \frac{3\pi}{8})$, $n = 2004$
- V obore komplexných čísel riešte rovnicu.
 - $z^4 = 4$
 - $z^4 = -4$
 - $z^3 = -8i$
 - $z^4 = -1 - i\sqrt{3}$
- Vypočítajte.
 - i^{101}
 - $(1+i)^4$
 - $(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2})^8$

Výsledky

- $-15 + 20i$, b) $10i$, c) $-\frac{19}{13} - \frac{17}{13}i$, d) $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} + \frac{2ab}{a^2+b^2}i$, e) $\frac{1}{34} + \frac{21}{34}i$
- $x = 1, y = -1$, b) $x = \pm 1, y = 0$, c) $x = -4, y = \frac{1}{2}$
- $5(\cos \pi + i \sin \pi)$, b) $\sqrt{2}(\cos \frac{7}{4}\pi + i \sin \frac{7}{4}\pi)$, c) $2(\cos \frac{11}{6}\pi + i \sin \frac{11}{6}\pi)$, d) $5(\cos \frac{3}{2}\pi + i \sin \frac{3}{2}\pi)$, e) $\sqrt{13}(\cos(\arctg \frac{3}{2}) + i \sin(\arctg \frac{3}{2}))$, f) $\sqrt{30}(\cos(\pi + \arctg \frac{7}{3}) + i \sin(\pi + \arctg \frac{7}{3}))$
- $2\sqrt{3}(\cos \frac{26}{15}\pi + i \sin \frac{26}{15}\pi)$, $\frac{\sqrt{3}}{2}(\cos \frac{16}{15}\pi + i \sin \frac{16}{15}\pi)$, $-9\sqrt{3}$
 - $18(\cos \frac{5}{8}\pi + i \sin \frac{5}{8}\pi)$, $\frac{1}{2}(\cos \frac{1}{8}\pi - i \sin \frac{1}{8}\pi)$, -3^{2004}
- $z_k = \sqrt{2}(\cos k\frac{\pi}{2} + i \sin k\frac{\pi}{2})$, $k = 0, 1, 2, 3$.
 - $z_k = \sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}) + i \sin(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}))$, $k = 0, 1, 2, 3$.
 - $z_k = 2(\cos(\frac{\pi}{2} + k\frac{2\pi}{3}) + i \sin(\frac{\pi}{2} + k\frac{2\pi}{3}))$, $k = 0, 1, 2$.
 - $z_k = \sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2}) + i \sin(\frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2}))$, $k = 0, 1, 2, 3$.
- a) i , b) -4 , c) $\frac{1}{16}$

2. POLYNÓMY

- Určte stupeň polynómu $f(x)$
 - $f(x) = 1 + x + ix$
 - $f(x) = 3x + 2 - 5x^3$
 - $f(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$, $n \in N$.
- Vynásobte a nájdite stupeň súčinu $f(x) \cdot g(x)$
 - $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = x^3 - 1$
 - $f(x) = x^3 + x + 1$, $g(x) = (x - i)$
- Del'te (určte podiel a zvyšok).
 - $(x^4 + 1) : (x - 1)$,
 - $(x^3 + x^2 + x + 1) : (x + 1)$
 - $(x^3 + x^2 + x + 1) : (x^2 + 1)$
- Daný polynóm rozložte na súčin mocnín ireducibilných polynómov nad R a nad C .
 - $2x^2 - x - 1$
 - $2x^2 - x + 1$
 - $3x^3 - x^2 + 3x - 1$
 - $x^4 + 4$
 - $2x^3 - x - 1$
 - $2x^4 - x^3 + 7x^2 - 4x - 4$
- Pomocou Hornerovej schémy vypočítajte hodnotu $f(c)$, ak
 - $f(x) = x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 10x + 16$, $c = 4$
 - $f(x) = 6x^4 - 7x^3 + 4x + 2$, $c = -\frac{1}{3}$
 - $f(x) = x^5 + (1 + 2i)x^4 - (1 + 3i)x^2 + 7$, $c = -2 - i$
- Nájdite takú hodnotu parametra a , že c bude koreňom polynómu $f(x)$.
 - $f(x) = x^3 + 2x^2 - ax + 2$, $c = 3$
 - $f(x) = 2x^6 - ax^4 - x^3 + ax^2 + 3a$, $c = -1$
- Nájdite násobnosť koreňa c polynómu $f(x)$.
 - $f(x) = x^6 - 4x^5 + 6x^4 - 8x^3 + 10x^2 - 8x + 8$, $c = 2$
 - $f(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$, $c = 2$
 - $f(x) = x^5 + 7x^4 + 16x^3 + 8x^2 - 16x - 16$, $c = -2$
 - $f(x) = x^6 - 2ix^5 - x^4 - x^2 + 2ix + 1$, $c = i$
- Nájdite všetky racionálne korene polynómu
 - $2x^7 - 13x^6 + 6x^5 + 13x^4 - 18x^3 + 29x^2 - 22x + 3$
 - $6x^4 - 11x^3 - x^2 - 4$
 - $10x^4 - 13x^3 + 15x^2 - 18x - 24$
 - $x^5 + x^4 - 6x^3 - 14x^2 - 11x - 3$
- Nájdite všetky korene polynómu.
 - $x^4 - 30x^2 + 289$
 - $x^3 + i$
 - $x^8 - 16$

Výsledky

- a) 1, b) 3, c) n
- a) $x^5 + x^3 - x^2 - 1$, 5, b) $x^4 - ix^3 + x^2 - ix - i$, 4
- a) $(x^4 + 1) = (x - 1)(x^3 + x^2 + x + 1) + 2$, (zv. 2)
b) $(x^3 + x^2 + x + 1) = (x + 1)(x^2 + 1)$, (zv. 0),
c) $(x^3 + x^2 + x + 1) = (x^2 + 1)(x + 1)$, (zv. 0)
- Nad R :
a) $2(x-1)(x+\frac{1}{2})$, b) $2x^2-x+1$, c) $(x^2+1)(3x-1)$,
d) $(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)$, e) $(2x^2+2x+1)(x-1)$,
f) $2(x-1)(x+\frac{1}{2})(x^2+4)$
nad C :
a) $2(x-1)(x+\frac{1}{2})$, b) $2(x-\frac{1+i\sqrt{7}}{4})(x-\frac{1-i\sqrt{7}}{4})$,
c) $(x+i)(x-i)(3x-1)$,
d) $(x-1-i)(x-1+i)(x+1-i)(x+1+i)$,
e) $2(x-1)(x+1+i\sqrt{2})(x+1-i\sqrt{2})$,
f) $2(x-1)(x+\frac{1}{2})(x+2i)(x-2i)$
- a) 136, b) 1, c) $-1 - 44i$
- a) $\frac{47}{3}$, b) -1
- a) 2, b) 3, c) 4, d) 3,
- a) $1, 1, -\frac{3}{2}$, b) $-\frac{2}{3}, 2$, c) \emptyset , d) $-1, -1, -1, -1, 3$
- a) $\pm 4 \pm i$, b) $i, \pm \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$, c) $\pm \sqrt{2}, \pm i\sqrt{2}, \pm 1 \pm i$

3. RACIONÁLNE FUNKCIE

- Napište, či je daná funkcia elementárnym zlomkom nad R .
a. $\frac{2x+1}{x^2+5x+6}$
b. $\frac{2x+1}{(x^2+4x+5)^n}$, $n \in \mathbb{N}$
c. $\frac{2x+1}{(x-2)^2}$
d. $\frac{1}{(x-2)^2}$
- Danú racionálnu funkciu napíšte v tvare súčtu polynómu a elementárných zlomkov nad R aj nad C .
a. $\frac{x^4+2x^3+4x^2+2x+1}{x^3+x^2-2}$
b. $\frac{x^2+2x}{x^3+3x^2+3x+1}$

$$\begin{aligned} & \text{c. } \frac{x^2-6x+7}{x^4-6x^3+13x^2-12x+4} \\ & \text{d. } \frac{3x^3-12x^2+12x-1}{x^4-6x^3+13x^2-12x+4} \\ & \text{e. } \frac{2x+3}{x^2+2x+2} \\ & \text{f. } \frac{2x^3+7x^2+14x+8}{(x^2+2x+2)^2} \end{aligned}$$

- Napište tvar rozkladu danej racionálnej funkcie na súčet elementárných zlomkov.

$$\begin{aligned} & \text{a. } \frac{f(x)}{(2x+1)^3(x-1)^2(2x^2-2x+1)}, \text{ st } f(x) = 6 \\ & \text{b. } \frac{x}{(x^2+1)^3(x^2-1)^3} \end{aligned}$$

Výsledky

- a) $D = 5^2 - 4 \cdot 6 = 1 > 0 \implies$ nie je,
b) $D = -4 < 0$, $\text{st}(2x+1) = 1 \implies$ áno, c) nie je,
d) áno
- a) $(x+1) + \frac{2}{x-1} + \frac{x+1}{x^2+2x+2}$ — nad R
 $(x+1) + \frac{2}{x-1} + \frac{(1/2)}{x+1+i} + \frac{(1/2)}{x+1-i}$ — nad C
b) $\frac{-1}{(x+1)^3} + \frac{1}{x+1}$, c) $\frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x-2)^2}$
d) $\frac{2}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{2}{x-2}$, e) $\frac{1+(i/2)}{x+1+i} + \frac{1-(i/2)}{x+1-i}$
f) $\frac{2x+3}{x^2+2x+2} + \frac{4x+2}{(x^2+2x+2)^2}$ — nad R
 $\frac{1+(i/2)}{x+1+i} + \frac{i}{(x+1+i)^2} + \frac{1-(i/2)}{x+1-i} + \frac{-i}{(x+1-i)^2}$ — nad C
- a) nad R :
 $\frac{a}{(2x+1)^3} + \frac{b}{(2x+1)^2} + \frac{c}{2x+1} + \frac{d}{(x-1)^2} + \frac{e}{x-1} + \frac{fx+g}{2x^2-2x+1}$,
 $a, b, c, d, e, f, g \in \mathbb{R}$
nad C :
 $\frac{a}{(2x+1)^3} + \frac{b}{(2x+1)^2} + \frac{c}{2x+1} + \frac{d}{(x-1)^2} + \frac{e}{x-1} + \frac{f}{x-(1+i)/2} + \frac{g}{x-(1-i)/2}$,
 $a, b, c, d, e, f, g \in \mathbb{C}$
b) nad R
 $\frac{ax+b}{(x^2+1)^3} + \frac{cx+d}{(x^2+1)^2} + \frac{ex+f}{x^2+1} + \frac{g}{(x-1)^3} + \frac{h}{(x-1)^2} + \frac{k}{x-1} + \frac{l}{(x+1)^3} + \frac{m}{(x+1)^2} + \frac{n}{x+1}$,
 $a, b, c, d, e, f, g, h, k, l, m, n \in \mathbb{R}$
Nad C :
 $\frac{a}{(x+i)^3} + \frac{b}{(x+i)^2} + \frac{c}{x+i} + \frac{d}{(x-i)^3} + \frac{e}{(x-i)^2} + \frac{f}{x-i} + \frac{g}{(x-1)^3} + \frac{h}{(x-1)^2} + \frac{k}{x-1} + \frac{l}{(x+1)^3} + \frac{m}{(x+1)^2} + \frac{n}{x+1}$,
 $a, b, c, d, e, f, g, h, k, l, m, n \in \mathbb{C}$

4. SÚSTAVY LINEÁRNYCH ROVNÍC

1. Riešte systémy lineárnych rovníc.

$$\begin{array}{ll} \text{a.} & x_1 + 2x_2 = -3 \\ & 3x_2 = -6 \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{b.} & 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 11 \\ & -3x_2 + x_3 = -3 \\ & 7x_3 = 21 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{c.} & 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ & -x_2 + x_3 = i \\ & 2x_3 = 2 + 2i \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{d.} & 2x_1 + x_2 - 3x_3 = -4 \\ & x_2 - x_3 = 2 \end{array}$$

2. Napíšte sústavu lineárnych rovníc a množinu všetkých jej riešení, ak jej rozšírená matica je

$$\begin{array}{ll} \text{a.} & \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \\ \text{b.} & \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right) \\ \text{c.} & \left(\begin{array}{ccc|c} 1+i & 1 & 1 & 1 \\ 0 & i & 2 & i \\ 0 & 0 & 1 & 1+i \end{array} \right) \\ \text{d.} & \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \\ \text{e.} & \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ \text{f.} & \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \end{array}$$

3. Rozhodnite, či je daná matica stupňovitá.

$$\text{a.} \left(\begin{array}{cccc} 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \text{b.} \left(\begin{array}{ccc} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \text{c.} \left(\begin{array}{ccc} 3 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

4. Riešte sústavy lineárnych rovníc

$$\begin{array}{ll} \text{a.} & x_1 - x_2 = -2 \\ & -3x_1 + 2x_2 = 3 \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{b.} & 12x_1 - x_2 + 5x_3 = 30 \\ & 3x_1 - 13x_2 + 2x_3 = 21 \\ & 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{c.} \quad 7x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1 \\ \quad -x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 2 \\ \quad -10x_1 + 15x_2 - 11x_3 = 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{d.} \quad 2x_1 - x_2 - 4x_3 = 1 \\ \quad x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ \quad 4x_1 - x_2 - 2x_3 = 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{e.} \quad 3x_1 - x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 2 \\ \quad 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 12 \\ \quad 4x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -1 \\ \quad 5x_1 + 4x_2 - 9x_3 = 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{f.} \quad 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 6x_4 = 1 \\ \quad 2x_1 + 2x_2 - 6x_3 + 2x_4 = 2 \\ \quad 2x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 3 \\ \quad -6x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{g.} \quad 2x_1 + (2-i)x_2 = 9 \\ \quad -x_1 + x_2 = i \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{h.} \quad 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 + i \\ \quad x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 14 - 3i \\ \quad x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 8 - 2i \end{array}$$

5. Riešte dva systémy s rovnakou maticou pomocou eliminácie na matici 3×5 .

$$\begin{array}{ll} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 & x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 9 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 9 & 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 9 & x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -2 \end{array}$$

6. Riešte homogénne sústavy lineárnych rovníc

$$\begin{array}{ll} \text{a.} & 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ & x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ & 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ \text{b.} & 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ & x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ & 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{array}$$

Výsledky

- a) $(1, -2)$, b) $(1, 2, 3)$, c) $(-i, 1, 1 + i)$
d) $\{(-3 + a, 2 + a, a) : a \in R\}$
- a) $\{(2 + p, p, 0, -1) : p \in R\}$, b) \emptyset ,
c) $(-1 - 2i, -1 + 2i, 1 + i)$, d) $\{(a, -2, 0, -1) : a \in R\}$,
e) $\{(1 + b - a, b, 0, a) : a, b \in R\}$,
f) $\{(\frac{1+p+q}{2}, 1 - p, p, q) : p, q \in R\}$
- a) áno, b) nie, c) áno
- a) $(1, 3)$, b) $(2, -1, 1)$, c) $(\frac{1}{60}, \frac{83}{180}, \frac{1}{4})$
d) $(\frac{3}{2}, 0, \frac{1}{2})$, e) $(0, 2, \frac{1}{3} - \frac{3}{2})$, f) \emptyset , g) $(2, 2 + i)$,
h) $(i, -i, 2)$
- $(-1, 2, 1)$, $(3, 1, -2)$
- a) $\{a(-2, 4, 1, 5) : a \in R\}$, b) $\{(0, 0, 0, 0)\}$

5. MATICOVÉ OPERÁCIE

1. Vypočítajte $2A$, $A + B$, AB , BA (ak existujú) pre matice:

$$\text{a.} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{b.} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{c.} \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{d.} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

2. K danej matici nájdite inverznú maticu.

a. $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ d. $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$

e. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ f. $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

g. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ h. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

i. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

j. $\begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ k. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Výsledky

1. a) $2A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$,

$A + B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $AB \nexists$, $BA \nexists$

b) $2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$, $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$,

$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

c) $2A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, $AB = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$,

$A + B \nexists$, $BA \nexists$

d) $2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $AB = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$,

$A + B \nexists$, $BA \nexists$

2. a) $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, c) \nexists ,

d) $\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$, e) $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & -7 & -1 \\ -6 & 8 & 2 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$,

f) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, g) $\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$,

h) $\begin{pmatrix} 3 & -5 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, i) $\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$,

j) $\begin{pmatrix} -7 & 5 & 12 & -19 \\ 3 & -2 & -5 & 8 \\ 41 & -30 & -69 & 111 \\ -59 & 43 & 99 & -159 \end{pmatrix}$,

k) $\begin{pmatrix} 3 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

6. DETERMINANTY

1. Vypočítajte nasledujúce determinanty.

a. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$, b. $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}$, c. $\begin{vmatrix} 2+i & 2 \\ 5 & 5-i \end{vmatrix}$

d. $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$, e. $\begin{vmatrix} a-2 & a+2 \\ b-2 & b+2 \end{vmatrix}$, f. $\begin{vmatrix} \sin \alpha & -\cos \alpha \\ \cos \alpha & \sin \alpha \end{vmatrix}$

2. Pre maticu $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

(a) Vypočítajte hodnoty $\det A_{31}$, $\det A_{32}$, $\det A_{33}$, kde A_{ij} je matica, ktorá vznikne z matice A vynechaním riadku R_i a stĺpca S_j .

(b) Vypočítajte hodnoty algebraických doplnkov \tilde{a}_{31} , \tilde{a}_{32} , \tilde{a}_{33} .

(c) Pomocou výsledkov z častí a), b) vypočítajte $\det A$

3. Platí tvrdenie: Ak $A, B \in C^{3 \times 3}$, tak $\det(A + B) = \det A + \det B$? Svoje tvrdenie odôvodnite.

4. Napíšte hodnotu determinantu

a. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$, b. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 5 & 0 & 4 \end{vmatrix}$, c. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

d. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & -3 & 3 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix}$, e. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, f. $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

5. Vypočítajte determinanty

a. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \end{vmatrix}$, b. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \\ a & b & a & b \\ c & d & c & d \end{vmatrix}$, c. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -3 & 4 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}$

d. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 3 & 1 & -1 & 5 & 1 \\ 5 & -2 & 3 & 6 & 1 \end{vmatrix}$, e. $\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 & -1 \\ 5 & 5 & 5 & -1 & 5 \\ 5 & 5 & -1 & 5 & 5 \\ 5 & -1 & 5 & 5 & 5 \\ -1 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}$

6. Vypočítajte determinanty matíc stupňa $n, n > 1$

a. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 3 & 3 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n & n & n \end{vmatrix}$

$$b. \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Výsledky

- a) -4 , b) 0 , c) $1 + 3i$, d) 4 , e) $4(a - b)$, f) 1
- (a) $11, 1, -4$, (b) $11, -1, -4$, c) -3
- Nie. Návod na odôvodnenie: nájdite maticu $A \in C^{3 \times 3}$, pre ktorú $\det 2A \neq 2 \det A$.
- a) 0 , b) 0 , c) -30 , d) -45 , e) -15 , f) 1 .
- a) 0 , b) $(ad - bc)^2$, c) -48 , d) -2 , e) 19×6^4
- a) $(-1)^{n+1}n$, b) $\prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j)$

6. CRAMEROVO PRAVIDLO

1. Použite determinanty na nájdenie inverznej matice

$$a. \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b. \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad c. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

2. Pomocou Cramerovho pravidla riešte sústavy:

$$\begin{array}{ll} a. & \begin{cases} 2x_1 + x_2 = -3 \\ 3x_1 + 8x_2 = 2 \end{cases} & b. & \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 = 5 \end{cases} \\ c. & \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 = 5i - 3 \end{cases} & d. & \begin{cases} 4x_1 + 5x_2 = 2 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 3 \\ 11x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases} \\ e. & \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ -2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 = -4 \end{cases} & f. & \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 0 \end{cases} \end{array}$$

Výsledky

$$1. a) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b) \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad c) \begin{pmatrix} 3 & 8 & -5 \\ -3 & -6 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$2a) (-2, 1)^\top, \quad b) (0, 2)^\top, \quad c) (i, 1 - i)^\top$$

$$d) \left(\frac{3}{11}, \frac{2}{11}, -\frac{1}{11}\right)^\top, \quad e) \left(-\frac{26}{11}, \frac{23}{11}, -\frac{7}{11}\right)^\top, \quad f) \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)^\top$$

7. LINERNA ZVISLOS A NEZVISLOS V C^n

1. Rozhodnite, či sú nasledujúce podmnožiny C^3 lineárne nezávislé, tie ktoré sú nezávislé doplňte na bázu C^3 .

- $\{(1, 1, 1), (1, 1, -1)\}$,
 - $\{(1, 1, 1), (1, 1, -1), (0, 0, 2)\}$,
 - $\{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$,
2. Zistite, či \mathbf{b} patrí do linerneho obalu množiny $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$, ak

- $\mathbf{b} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{b}_1 = (1, 1, 1)$
 $\mathbf{b}_2 = (1, 1, -1)$, $\mathbf{b}_3 = (0, 0, 2)$ },
- $\mathbf{b} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{b}_1 = (1, 1, 1)$
 $\mathbf{b}_2 = (1, 1, 0)$, $\mathbf{b}_3 = (0, 1, 1)$ },
- $\mathbf{b} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{b}_1 = (1, 2, 0)$
 $\mathbf{b}_2 = (1, 2, -1)$, $\mathbf{b}_3 = (0, 0, 1)$ },

3. Určte hodnoty matice:

$$a. \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$b. \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$c. \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 & 5 & -1 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & -2 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 4 & -5 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix},$$

$$d. \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$e. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Zistite aká je dimenzia podpriestoru $M \subset R^4$ tak, e ho vyjadrite ako lineárny obal lineárne nezávislej množiny.

- $M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4 : x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0\}$
- $M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4 : x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0, x_3 + x_4 = 0\}$.

Výsledky

- a) nezávislá, b) zvisl, c) nezávislá
- a) nepatrí, b) patrí, c) patrí,
- a) 2, b) 3, c) 4, d) 3, e) 2
- a) $M = \{(-2a + b - c, a, b, c) : a, b, c \in R\} = \text{Lo}\{(-2, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1)\}$, $\dim M = 3$.
- $M = \text{Lo}\{(-2, 1, 0, 0), (-2, 0, -1, 1)\}$, $\dim M = 2$.

8. VEKTORY V 3-ROZMERNOM PRIESTORE.

- Vypočítajte skalrny súčin $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ a zistite, i je ich uhol α ostrý, tupý alebo pravý.
 - $\mathbf{u} = (1, -1, 2)$, $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$
 - $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$
 - $\mathbf{u} = (2, -2, 1)$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$
- Nájdite ortogonálnu projekciu vektora \mathbf{u} do smeru vektora \mathbf{v} a nájdite zložku kolmú na \mathbf{v} .
 - $\mathbf{u} = (3, -5, 2)$, $\mathbf{v} = (-3, 0, 4)$,
 - $\mathbf{u} = (-1, 2, 1)$, $\mathbf{v} = (2, 2, 1)$
- Ukážte, že $A = (2, -1, 1)$, $B = (3, 2, -1)$ a $C = (7, 0, -2)$ sú vrcholy pravouhlego trojuholníka. Pri ktorom vrchole je pravý uhol? Vypočítajte jeho obsah P_{ABC} .
- Vypočítajte $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$.
 - $\mathbf{u} = (1, -2, -1)$, $\mathbf{v} = (0, 1, 1)$.
 - $\mathbf{u} = (-2, 1, 3)$, $\mathbf{v} = (4, -2, -6)$
- Nájdite vektor dĺžky 1 kolmý aj na \mathbf{u} aj na \mathbf{v} .
 - $\mathbf{u} = (1, 1, -1)$, $\mathbf{v} = (0, 3, 1)$
 - $\mathbf{u} = (2, 1, 0)$, $\mathbf{v} = (0, 1, 2)$
- Nájdite obsah trojuholníka ABC .
 - $A = (2, 0, 1)$, $B = (3, -1, 2)$, $C = (-3, 4, 2)$
 - $A = (1, 3, 2)$, $B = (5, 3, 1)$, $C = (-3, 1, 2)$
- Nájdite objem rovnobežnostena vytvoreného vektormi \vec{AB} , \vec{AC} , \vec{AD} .
 - $A = (-2, 3, 1)$, $B = (1, -2, 3)$,
 $C = (2, 1, 0)$, $D = (3, 2, 1)$
 - $A = (-1, 4, 2)$, $B = (2, 3, 4)$,
 $C = (0, 4, 2)$, $D = (3, 6, 3)$
- Vypočítajte $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$, ak
 - $\|\mathbf{a}\| = 3$, $\|\mathbf{b}\| = 2$ a uhol medzi \mathbf{a} a \mathbf{b} je 60°
 - $\|\mathbf{a}\| = 5$, $\|\mathbf{b}\| = 8$ a $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 24$
- Vypočítajte $\|(3\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - 3\mathbf{b})\|$, ak
 - $\|\mathbf{a}\| = 3$, $\|\mathbf{b}\| = 5$ a uhol medzi \mathbf{a} a \mathbf{b} je $\frac{\pi}{6}$,
 - $\|\mathbf{a}\| = 2$, $\|\mathbf{b}\| = 3$ a $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -3\sqrt{3}$

Výsledky

- a) 0, pravý, b) -1 , tupý, c) 3, ostrý
- a) $P_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = -\frac{1}{25}(-3, 0, 4)$, $(3, -5, 2) + \frac{1}{25}(-3, 0, 4)$,
b) $P_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \frac{1}{3}(2, 2, 1)$, $(-1, 2, 1) - \frac{1}{3}(2, 2, 1)$.
- Pri vrchole B . $P_{ABC} = \frac{7\sqrt{6}}{2}$.
- 4a) $(-1, -1, 1)$, b) $(0, 0, 0)$
- 5a) $\frac{\pm 1}{\sqrt{26}}(4, -1, 3)$, b) $\frac{\pm 1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1)$
- 6a) $\frac{1}{2}\sqrt{62}$, b) $\sqrt{21}$.
- 7a) 34, b) 5
- 8a)
 - $3\sqrt{3}$, b) 32
- 9a) $\frac{15}{2}$, b) 3

9. PRIAMKY A ROVINY V PRIESTORE

- Nájdite všeobecnú rovnicu roviny s normálovým vektorom \mathbf{n} , ktorá prechádza bodom P .
 - $P = (1, 2, 3)$, $\mathbf{n} = (2, -3, 1)$
 - $P = (-2, 3, 5)$, $\mathbf{n} = (3, 7, -2)$
- Nájdite všeobecnú rovnicu roviny prechádzajúcu cez body A, B, C .
 - $A = (1, 0, -1)$, $B = (0, 2, 3)$, $C = (-2, 1, 1)$
 - $A = (-1, 3, 2)$, $b = (2, 1, -1)$, $C = (3, 2, 1)$
- Rozhodnite, či roviny sú rovnobežné.
 - $2x - y + 3z + 3 = 0$, $-4x + 2y + 9z + 1 = 0$
 - $-x + 3y + 2z + 1 = 0$, $2x - 6y - 4z + 5 = 0$
- Rozhodnite, či priamka p a rovina ρ sú rovnobežné.
 - $p: x = 1 + 2t, y = 3 - t, z = -1 - 4t, t \in R$;
 $\rho: 3x + 2y + 5z - 7 = 0$
 - $p: x = t, y = 2t, z = 2t, t \in R$; $\rho: 2x + 4y - 5z + 3 = 0$
- Rozhodnite, či sú priamka p a rovina ρ kolmé.
 - $p: x = 1 + 2t, y = 3 - t, z = -1 - 4t, t \in R$;
 $\rho: -4x + 2y + 8z + 3 = 0$
 - $p: x = 4 + 3t, y = 1 - 2t, z = -1 + 4t, t \in R$;
 $\rho: x - 5y + 2z - 7 = 0$
- Nájdite parametrické rovnice priamky p , ktorá je priesečnicou rovín
 - $\rho_1: -2x + 3y + 7z + 2 = 0$, $\rho_2: x + 2y - 3z + 5 = 0$
 - $\rho_1: 3x - 5y + 2z = 0$, $\rho_2: x + z = 0$
- Nájdite rovnicu roviny prechádzajúcej cez bod $(-1, 4, -3)$, ktorá je kolmá na priamku $x = 2 + t, y = -3 + 2t, z = -t, t \in R$.
- Nájdite rovnicu roviny ρ prechádzajúcej cez bod $(-1, 2, 4)$, ktorá je rovnobežná s rovinou
 - xy , b) xz , c) $x + y + z + 1 = 0$.
- Nájdite rovnicu roviny, prechádzajúcej cez bod $(-1, 4, 2)$, ktorá obsahuje priesečnicu rovín $4x - y + z - 2 = 0$ a $2x + y - 2z - 3 = 0$.
- Nájdite rovnicu roviny, ktorá je rovinou súmernosti bodov $(2, -1, 1)$ a $(3, 1, 5)$.
- Nájdite priesečník priamok
 - $p: x = -1 + 4t, y = 3 + t, z = 1, t \in R$
 $q: x = -13 + 12t, y = 1 + 6t, z = 2 + 3t, t \in R$.
 - $p: x = -1 + 4t, y = 3 + t, z = 1, t \in R$
 $q: x = -13 + 12t, y = 1 + 6t, z = 1 + 3t, t \in R$.

Výsledky

- 1a) $2x - 3y + z + 1 = 0$, b) $3x + 7y - 2z - 5 = 0$.
- 2a) $2y - z - 1 = 0$, b) $x + 9y - 5z - 16 = 0$.
- 3a) rôznobežné, b) rovnoben.
- 4a) nie, b) áno $p \parallel \rho$.
- 5a) áno, $p \perp \rho$, b) nie.
- 6a) $p: x = -41 - 5t, y = t, z = -12 - t, t \in R$,
b) $p: x = 5t, y = t, z = -5t, t \in R$.
7. $\rho: (x + 1) + 2(y - 4) - (z + 3) = 0$
- 8a) $\rho: z = 4$, b) $\rho: y = 2$,
c) $\rho: (x + 1) + (y - 2) + (z - 4) = 0$.
9. $4x - 13y + 21z - 14 = 0$.
10. $(x - \frac{5}{2}) + y + 4(z - 3) = 0$
- 11a) $p \cap q = (-17, -1, 1)$, b) $p \cap q = \emptyset$.