PRÍKLADY

Príklad 1. Je daná funkcia
$$f(x) = \frac{x^2+5x}{(x+3)^2}.$$

a, Nájdite jej definičný obor.
b, Nájdite intervaly monotónnosti funkcie f a lokálne extrémy.
c, Zistite, kde je funkcia f konvexná a kde konkávna.

Riešenie 1.
a, $D_f = R - \{-3\}$
b,
$$\begin{aligned} f'(x) =& \frac{(2x+5)(x+3)^2 - (x^2+5x)2(x+3)}{(x+3)^4} = \\ =& \frac{(2x+5)(x+3) - 2(x^2+5x)}{(x+3)^3} = \frac{x+15}{(x+3)^3}. \end{aligned}$$

Preto $x_0 = -15$ je stacionárny bod.
Funkcia f je rastúca na intervaloch $(-\infty, -15]$ a na $(-3, \infty)$.
Funkcia f je klesajúca na intervale $[-15, -3)$.
Bod $x_0 = -15$ je bod ostrého lokálneho maxima.
c,
$$f''(x) = \frac{(x+3)^3 - 3(x+15)(x+3)^2}{(x+3)^6} = \frac{(x+3) - 3(x+15)}{(x+3)^4} = \frac{-2x-42}{(x+3)^4}.$$

Bod $x_0 = -21$ je nulový bod f''.
Funkcia f je konkávna na intervaloch $[-21, -3)$ a na $(-3, \infty)$.
Funkcia f je konvexná na intervale $(-\infty, -21]$.
Bod $x_0 = -21$ je inflexný bod.

Príklad 2. Vypočítajte limitu
$$\lim_{x\to 0} \frac{x \ln(2x+1)}{\sin^2 x}.$$

Riešenie 2.
$$\lim_{x\to 0} \frac{x \ln(2x+1)}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(2x+1) + \frac{2x}{(2x+1)}}{2 \sin x \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{(2x+1)} + \frac{2}{(2x+1)^2}}{2\cos^2 x - 2\sin^2 x} = 2.$$

Príklad 3.
a, Nájdite súčet radu
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 \cdot (-2)^{3n}}{3^{2n}}.$$

b, Zistite, či konverguje alebo diverguje rad

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)! \cdot (n+1)!}{(2n-1)!}.$$

Riešenie 3.

a, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 \cdot (-2)^{3n}}{3^{2n}} = \frac{\frac{-40}{9}}{1 - \frac{-8}{9}} = -\frac{40}{17}.$

b, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n)! \cdot (n+2)!}{(2n+1)!}}{\frac{(n-1)! \cdot (n+1)!}{(2n-1)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+2)}{(2n+1)2n} = \frac{1}{4} < 1.$

Preto rad konverguje.

Príklad 4. Vypočítajte

$$\int \frac{x^2}{x^2+x-2}\, dx.$$

Riešenie 4.

$$\int \frac{x^2}{x^2+x-2}\, dx = \int 1 - \frac{x-2}{x^2+x-2}\, dx = x - \int \frac{\frac{4}{3}}{x+2} - \frac{\frac{1}{3}}{x-1}\, dx =$$

$$= x - \frac{4}{3} \ln|x+2| + \frac{1}{3} \ln|x-1| + c.$$

Príklad 5. Vypočítajte

$$\int_0^1 e^{2x+3} \cdot x^2\, dx.$$

Riešenie 5.

$$\int_0^1 e^{2x+3} \cdot x^2\, dx = \left[\frac{1}{2} e^{2x+3} \cdot x^2\right]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 e^{2x+3} \cdot 2x\, dx =$$

$$= \frac{1}{2} e^5 - \left(\left[\frac{1}{2} e^{2x+3} \cdot x\right]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 e^{2x+3}\, dx \right) = \frac{1}{2} e^5 - \frac{1}{2} e^5 + \frac{1}{4} e^5 - \frac{1}{4} e^3 = \frac{1}{4}(e^5 - e^3).$$