

11 NEURČITÝ INTEGRÁL

Príklad. Vypočítajte integrál

$$\int x \arcsin x \, dx.$$

Uveďte celý postup riešenia.

Riešenie.

Správnych postupov je viac. Napríklad tento:
Použijeme substitúciu

$$x = \sin t, \quad dx = \cos t \, dt.$$

Z nej

$$\int x \arcsin x \, dx = \int \sin t \arcsin(\sin t) \cos t \, dt = \int t \sin t \cos t \, dt.$$

Použijeme vzorec

$$\sin 2t = 2 \sin t \cos t$$

a dostaneme integrál, ktorrý ďalej počítame metódou per partes

$$\frac{1}{2} \int t \sin 2t \, dt = \frac{1}{2} \left(t \left(-\frac{\cos 2t}{2} \right) + \int \frac{\cos 2t}{2} \, dt \right) = -t \frac{\cos 2t}{4} + \frac{\sin 2t}{8}.$$

Po spätnej substitúcii $t = \arcsin x$ dostaneme výsledok

$$-t \frac{\cos 2t}{4} + \frac{\sin 2t}{8} = -\arcsin x \frac{\cos 2 \arcsin x}{4} + \frac{\sin 2 \arcsin x}{8} = -\arcsin x \frac{1 - 2x^2}{4} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{4}. \blacksquare$$