

### 3 LIMITA A SPOJITOSŤ FUNKCIE

**Veta (o vynulovaní ohraničenej).** *Nech  $f : A \rightarrow R$ ,  $g : A \rightarrow R$ . Nech existuje limita  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ , a nech je funkcia  $g(x)$  ohraničená.*

*Potom  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = 0$ .*

Vypočítajte limitu

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x}$ .
2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg} x \sin \frac{1}{x}$ .

**Veta (o limite zloženej funkcie).** *Nech  $f : A \rightarrow B$ ,  $g : B \rightarrow R$ . Nech*

- *existuje limita  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$ ,*
- *existuje limita  $\lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = L$ ,*
- *$f(x) \neq y_0$  na nejakom prstencovom okolí  $O_\delta^\circ(x_0)$ .*

*Potom  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = \lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = L$ .*

Vypočítajte limitu

3.  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x - \pi}$ .
4.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$ .

**Veta (o výpočte pre nevlastnú limitu).** *Nech  $f : A \rightarrow R$ ,  $g : A \rightarrow R$ , nech existuje limita  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  a nech  $x_0$  je hromadný bod množiny  $A$ .*

*Potom*

- *ak je funkcia  $g(x)$  ohraničená zdola, tak  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + g(x) = +\infty$ ,*
- *ak je funkcia  $g(x)$  ohraničená zdola kladnou konštantou, tak  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = +\infty$ ,*
- *$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$ ,*
- *ak  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  a  $f(x) > 0$  na nejakom prstencovom okolí  $O_\delta^\circ(x_0)$ , tak  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ .*

Vypočítajte limitu

5.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x + \frac{1}{x}$ .
6.  $\lim_{x \rightarrow \infty} x + \frac{1}{x}$ .
7.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 - \cos x}$ .
8.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln x}$ .

Vypočítajte limitu v nevlastnom bode

$$9. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 4x^2 - 5x - 6}{3x^3 - 4x + 13} .$$

$$10. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 4x^2 - 5x - 6}{3x^2 - 4x + 3} .$$

$$11. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 5x - 6}{3x^3 - 3x + 8} .$$

$$12. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^3 - 4x^2 - 5x - 6}{3x^2 - 4x + 3} .$$

$$13. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^4 - 3x + 5}}{3x^2 + 4x - 13} .$$

$$14. \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 1} - x .$$

$$15. \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + x} - x .$$

$$16. \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^4 + x^3} - x^2 .$$

Vypočítajte limitu

$$17. \lim_{x \rightarrow 0} x(\operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x) .$$

$$18. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sqrt{x+1} - 1} .$$

**Definícia.** Nech  $f : A \rightarrow R$ , a nech  $x_0 \in A$ . Hovoríme, že funkcia  $f$  je v bode  $x_0$  spojitá, ak existuje vlastná limita

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Zistite, či je v danom bode  $x_0$  spojitá funkcia  $f$

$$19. x_0 = 0, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{tg} x}{x} & \text{pre } x < 0 \\ 2 & \text{pre } x = 0 \\ \frac{\sqrt{x+4} - 2}{\sqrt{x+1} - 1} & \text{pre } x > 0 \end{cases} .$$

$$20. x_0 = 0, \quad f(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{x} + 1} - \sqrt{\frac{1}{x}} & \text{pre } x < 0 \\ 0 & \text{pre } x = 0 \\ \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{2}}{\sin x} & \text{pre } x > 0 \end{cases} .$$

$$21. x_0 = 1, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1 - x^3}{1 - x} & \text{pre } x \neq 1 \\ 3 & \text{pre } x = 1 \end{cases} .$$

$$22. x_0 = 1, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1 - x^{\frac{1}{2}}}{1 - x} & \text{pre } x \neq 1 \\ \frac{1}{2} & \text{pre } x = 1 \end{cases} .$$

23. Grafy funkcií  $f(x) = \frac{\cos x + 1}{(x - \pi)^2}$  pre  $x > \pi$  a  $g(x) = \frac{x^2}{1 - \cos x}$  pre  $x < 0$  spojte úsečkou tak, aby funkcia

$$h(x) = \begin{cases} \frac{\cos x + 1}{(x - \pi)^2} & \text{pre } x > \pi \\ ax + b & \text{pre } 0 \leq x \leq \pi \\ \frac{x^2}{1 - \cos x} & \text{pre } x < 0 \end{cases}$$

bola spojitá.

#### VÝSLEDKY

1. 0    2. 0    3. -1    4. -1    5.  $\infty$     6.  $\infty$     7.  $\infty$     8. 0    9.  $\frac{2}{3}$   
 10.  $\infty$     11. 0    12.  $-\infty$     13.  $\frac{1}{3}$     14. 0    15.  $\frac{1}{2}$     16.  $\infty$     17. -1    18. 0  
 19. nie je,    20. nie je,    21. je    22. je    23.  $a = -\frac{3}{2\pi}$ ,     $b = 2$