

## 2 LIMITA FUNKCIE

**Definícia.** Nech  $f : A \rightarrow R$ , a nech  $x_0$  je hromadný bod množiny  $A$ . Hovoríme, že funkcia  $f$  má v bode  $x_0$  limitu  $L \in R^*$ , ak:

$$\forall O_\varepsilon(L) \exists O_\delta^\circ(x_0), \text{ také, že } x \in O_\delta^\circ(x_0) \Rightarrow f(x) \in O_\varepsilon(L).$$

Značíme  $L = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ .

**Veta (o výpočte).** Nech  $f : A \rightarrow R$ ,  $g : A \rightarrow R$  a nech existujú vlastné limity

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_1, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L_2.$$

Potom

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + g(x) = L_1 + L_2,$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = L_1 \cdot L_2,$$

$$\text{ak naviac } L_2 \neq 0, \text{ tak } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}.$$

**Veta (o zúžení).** Nech  $f : A \rightarrow R$ ,  $g : A_1 \rightarrow R$  pričom  $A_1 \subset A$  a nech  $x_0$  je hromadný bod  $A_1$ . Nech existuje limita  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ .

Potom aj  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L$ .

Vypočítajte limitu

1.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x}{x^2 + 3}$ .
2.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+6)}{(2x-4)(4x+3)}$ .
3.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 4x + 3}$ .
4.  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x-3} - 1}$ .
5.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{3+2x}}{\sqrt{x+3} - \sqrt{5+3x}}$ .
6.  $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{x - 8}$ .   Návod: Použite vzorec  $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

Pri zúžení na množinu  $A_- = A \cap (-\infty, x_0)$  hovoríme o limite zľava v bode  $x_0$ . Značíme  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ .

Pri zúžení na množinu  $A_+ = A \cap (x_0, \infty)$  hovoríme o limite sprava v bode  $x_0$ . Značíme  $L = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ .

Vypočítajte jednostrannú limitu

7.  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x-1}$
8.  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{x-1}$
9.  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{\sqrt{(x-2)}}$

10.  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{\sqrt{(x-2)}}$   
 11.  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 4x + 3}$   
 12.  $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}}$   
 13.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}}$   
 14.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+3}{x^2-1}$

**Veta (o dvoch policajtoch).** *Nech  $f : A \rightarrow R$ ,  $g : A \rightarrow R$ ,  $h : A \rightarrow R$ , pričom  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ . Nech existujú limity  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = L$ .*

*Potom aj  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L$ .*

**Veta (o vynulovaní ohraničenej).** *Nech  $f : A \rightarrow R$ ,  $g : A \rightarrow R$ . Nech existuje limita  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ , a nech je funkcia  $g(x)$  ohraničená.*

*Potom  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = 0$ .*

Použitím vzťahu  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ , vypočítajte limitu

15.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{5x}$   
 16.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{3x}$   
 17.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sqrt{x+1} - 1}$   
 18.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x^2 - 1)}{x - 1}$   
 19.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$

### Výsledky

1.  $\frac{1}{2}$       2.  $\frac{4}{11}$       3.  $\frac{5}{2}$       4.  $\frac{1}{2}$       5.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$       6.  $\frac{1}{12}$       7.  $+\infty$   
 8.  $-\infty$       9.  $+\infty$       10. neexistuje (2 nie je hromadný bod def. oboru zúženia)  
 11.  $+\infty$       12. 0      13.  $+\infty$       14. neexistuje      15.  $\frac{3}{5}$       16.  $\frac{2}{3}$       17. 6  
 18. 2      19.  $-\frac{1}{2}$