

## PREDNÁŠKA 10.

### L'HOSPITALOVO PRAVIDLO

Francúzsky šľachtic, markíz de l'Hospital bol okrem iného aj matematikom a autorom oceňovanej učebnice analýzy. Vyšla na prelome 17. a 18. storočia a hovorí sa o nej, ako o prvej učebnici diferenciálneho počtu.

V tejto knihe sa objavila aj veta, ktorá hovorí, ako počítať niektoré limity použitím derivácií.

**Veta (l'Hospitalovo pravidlo).** *Nech  $f : A \rightarrow R$ ,  $g : A \rightarrow R$  sú diferencovateľné funkcie a nech  $x_0$  je hromadný bod  $A$ .*

*Nech buď*

a. *existujú limity  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  a  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ ,*

*alebo*

b. *existujú limity  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$  a  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$ .*

*Potom ak  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ , tak  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ .*

Povedané hovorovou rečou, ak počítáš limitu podielu dvoch funkcií, pričom obe sa blížia buď k nule, alebo obe do nekonečna, môžeš podiel funkcií nahradiť podielom smerníc ich dotyčníc. Ak limita existuje, tak je rovnaká, ako limita pôvodného podielu.

Použijeme l'Hospitalovo pravidlo v príkladoch.

**Príklad 1.** Vypočítajme limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}.$$

**Riešenie.**

Výsledok už dopredu poznáme, chceme ale vidieť postup pomocou l'Hospitalovho pravidla.

Pretože

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0, \quad \text{aj} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x = 0,$$

je splnený predpoklad a.

Počítajme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$$

Pretože táto limita existuje, tak aj

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

V nasledujúcich príkladoch použijeme zaužívaný zrýchlený zápis.

**Príklad 2.** Vypočítajme limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}.$$

**Riešenie.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = 1.$$

Pri tomto zápise je prvé rovnítko „podmienené“, platí len ak druhá limita existuje.

(Tu môžeme tiež poznamenať, že ak limita podielu derivácií neexistuje, tak o limite pôvodného podielu nevieme povedať nič.)

**Príklad 3.** Vypočítajte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1}.$$

**Riešenie.**

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1.$$

Nasledujúci príklad ukazuje, že l'Hospitalovo pravidlo sa dá použiť opakovane.

**Príklad 4.** Vypočítajte limitu

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^3 - 3x + 1}.$$

**Riešenie.**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^3 - 3x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{3x^2 - 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{6x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{6} = \infty.$$

Vyriešený príklad okrem opakovaného použitia l'Hospitalovho pravidla má aj teoretické zošobecnenie. Vidíme z neho, že exponenciálna funkcia rastie do nekonečna rýchlejšie ako akýkoľvek polynóm.

**Príklad 5.** Vypočítajte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x.$$

**Riešenie.**

V zadaní nie je podiel, preto treba najprv upraviť súčin na podiel, a až potom počítať limitu.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -x = 0.$$

Nevadí, že prirodzený logaritmus má v nule limitu sprava rovnú  $-\infty$ , pre použitie vety môžeme považovať znamienko „-“ za vyňaté pred limitu.

**Príklad 6.** Vypočítajte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right).$$

**Riešenie.**

Aj v tomto príklade potrebujeme najprv limitovaný rozdiel upraviť.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x - x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\sin x}{2 \cos x - x \sin x} = 0.$$

Uvedomme si, že v priebehu výpočtu treba v každom kroku kontrolovať, či sú splnené predpoklady l'Hospitalovej vety. V poslednom podieli už je limita menovateľa rovná 2, preto sme už l'Hospitalovo pravidlo nemohli ( a ani nepotrebovali) použiť.

**Príklad 7.** Vypočítajte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2}{x^2} - \frac{1}{1 - \cos x} \right).$$

**Riešenie.**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2}{x^2} - \frac{1}{1 - \cos x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2 \cos x - x^2}{x^2(1 - \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x - 2x}{2x(1 - \cos x) + x^2 \sin x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x - 2}{2(1 - \cos x) + 4x \sin x + x^2 \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin x}{6 \sin x + 6x \cos x - x^2 \sin x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \cos x}{12 \cos x - 8x \sin x - x^2 \cos x} = -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

## ASYMPTOTY V NEKONEČNE

Budeme sa zaoberať funkciou, ktorá je definovaná na niektorom neohraničenom intervale. Kvôli konkrétnosti sa venujeme intervalu  $(a, \infty)$ . Situácia v okolí  $-\infty$  je analogická.

Pýtame sa na správanie funkcie  $f$ , ak jej premenná  $x$  rastie do  $\infty$ . Konkrétne sa budeme pýtať, či existuje taká priamka  $y = kx + q$ , že funkcia  $f$  sa pre veľké hodnoty  $x$  chová približne ako táto priamka. Je to akási „dotyčnica“ ku grafu funkcie  $f$  v nekonečne.

Ak taká priamka existuje, nazývame ju asymptota v  $\infty$ .

Ako príklad môžeme uviesť funkciu  $\arctg(x)$ , ktorá sa v pre  $x$  idúce do nekonečna blíži ku konštante  $\frac{\pi}{2}$ , a teda jej asymptota v  $\infty$  je priamka  $y = 0x + \frac{\pi}{2}$ .

Skúsme trochu spresniť naše predstavy o asymptote. Ako prvé očakávame, že funkcia  $f$  a jej asymptota majú približne rovnaký smer. Teda chceme aby

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{kx + q} = 1.$$

Po úprave

$$1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{f(x)}{x}}{\frac{kx+q}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{f(x)}{x}}{k}.$$

Teda

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Ďalej chceme, aby sa rozdiel medzi grafom funkcie a asymptotou znižoval k nule,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - (kx + q) = 0.$$

Teda

$$q = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - kx.$$

**Definícia.** Nech  $f : (a, \infty) \rightarrow R$  je funkcia definovaná na intervale  $(a, \infty)$ .

Ak existujú konečné limity

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x},$$

a

$$q = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - kx,$$

tak priamku  $y = kx + q$  nazývame asymptota funkcie  $f$  v  $\infty$ .

Asymptotu v  $-\infty$  definujeme analogicky.

**Príklad 8.** Nájdime asymptotu funkcie

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{x + 1}$$

v nekonečne.

**Riešenie.**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2 - 3}{x + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3}{x^2 + x} = 1,$$

a teda  $k = 1$ .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3}{x + 1} - 1x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3 - x^2 - x}{x + 1} = -1,$$

a teda  $q = -1$ .

Priamka  $y = x - 1$  je asymptota funkcie  $f$  v nekonečne.

**Príklad 9.** Nájďime asymptoty funkcie

$$f(x) = \frac{xe^x}{e^x + 1}$$

v  $\pm\infty$ .

**Riešenie.**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{xe^x}{e^x + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{e^x + 1} = 1,$$

a teda  $k = 1$ .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xe^x}{e^x + 1} - 1x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xe^x - xe^x - x}{e^x + 1} = 0,$$

a teda  $q = 0$ .

Priamka  $y = x$  je asymptota funkcie  $f$  v nekonečne.

V  $-\infty$  je výpočet podobný.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{xe^x}{e^x + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} = 0,$$

a teda  $k = 0$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{xe^x}{e^x + 1} - 0x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{xe^x}{e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{1 + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -e^x = 0,$$

a teda  $q = 0$ .

Priamka  $y = 0$  je asymptota funkcie  $f$  v  $-\infty$ .