

## PREDNÁŠKA 7.

### MONOTÓNNOŠT A LOKÁLNE EXTRÉMY

#### MONOTÓNNOŠT

Je prirodzené očakávať, že ak je smernica dotykovej priamky kladná, a teda dotyková priamka rastie, tak aj funkcia  $f$  je aspoň na malom kúsku okolo bodu dotyku rastúca.

Pojem rastu resp. klesania je intuitívne veľmi jasný, napriek tomu ponúkame formálnu definíciu.

**Definícia.** Nech  $f : I \rightarrow R$  je funkcia definovaná, na intervale  $I$ .

Hovoríme, že funkcia  $f$  je na intervale  $I$ :

- neklesajúca, ak  $\forall x_1, x_2 \in I$  platí  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ ,
- rastúca, ak  $\forall x_1, x_2 \in I$  platí  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ ,
- nerastúca, ak  $\forall x_1, x_2 \in I$  platí  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ ,
- klesajúca, ak  $\forall x_1, x_2 \in I$  platí  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ .

Definované pojmy nepotrebujú, aby funkcia  $f$  bola diferencovateľná. Ak ale je, vieme dať do súvislosti rast, resp. klesanie funkcie a znamienko derivácie.

**Veta (o monotónnosti).** Nech  $f : I \rightarrow R$  je funkcia diferencovateľná, na intervale  $I$ .

Potom  $f$  je na intervale  $I$ :

- neklesajúca, práve vtedy keď  $\forall x \in I$  platí  $f'(x) \geq 0$
- nerastúca, práve vtedy keď  $\forall x \in I$  platí  $f'(x) \leq 0$

Ak  $\forall x \in I$  platí

- $f'(x) > 0$ , tak je funkcia  $f$  rastúca
- $f'(x) < 0$ , tak je funkcia  $f$  klesajúca.

Veta nám umožňuje efektívne určiť intervaly v definičnom obore, na ktorých je funkcia  $f$  rastúca a na ktorých klesajúca.

**Príklad 1.** Nájdime intervaly monotónnosti funkcie

$$f(x) = x^3 - 3x.$$

**Riešenie.**

Definičný obor funkcie  $f$  je  $D_f = R$ .

Derivácia funkcie  $f$  je

$$f'(x) = 3x^2 - 3.$$

Riešme rovnicu

$$3x^2 - 3 = 0.$$

Korene tejto kvadratickej rovnice sú  $x_1 = -1$  a  $x_2 = 1$ . V týchto dvoch bodoch (a v žiadnych iných) je  $f'$  rovná nule. Z vlastností spojitých funkcií vieme, že na intervaloch  $(-\infty, -1)$ ,  $(-1, 1)$  a  $(1, \infty)$  už funkcia  $f'$  nemení svoje znamienko.

Preto stačí zistiť znamienko derivácie v jednom zvolenom bode z každého intervalu. Zrejme  $f'(-2) = 9 > 0$ ,  $f'(0) = -3 < 0$  a  $f'(2) = 9 > 0$ .

Teda  $f'$  je kladná a funkcia  $f$  je rastúca na intervale  $(-\infty, -1)$ , a na  $(1, \infty)$ .

Tiež  $f'$  je záporná a funkcia  $f$  je klesajúca na intervale  $(-1, 1)$ .

Použitím definície monotónnosti a spojitosti funkcie  $f$  vieme rozšíriť intervaly rastu a klesania na uzavreté.

Funkcia  $f$  je rastúca na intervale  $(-\infty, -1]$ , a na  $[1, \infty)$  a klesajúca na intervale  $[-1, 1]$ .

**Príklad 2.** Nájdime intervaly monotónnosti funkcie

$$f(x) = x \cdot e^{-x^2}.$$

**Riešenie.**

Definičný obor funkcie  $f$  je  $D_f = R$ .

Derivácia funkcie  $f$  je

$$f'(x) = e^{-x^2} - xe^{-x^2}2x = (1 - 2x^2)e^{-x^2}.$$

Hľadajme body, v ktorých je derivácia nulová. Riešme rovnicu

$$1 - 2x^2 = 0.$$

Korene tejto kvadratickej rovnice sú  $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$  a  $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

Opäť vieme, že na intervaloch  $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ ,  $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$  a  $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty)$  už funkcia  $f'$  nemení svoje znamienko.

Pretože  $f'(-2) < 0$ ,  $f'(0) = 1 > 0$  a  $f'(2) < 0$ .

Funkcia  $f$  je klesajúca na intervale  $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}]$ , a na  $[\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty)$  a rastúca na intervale  $[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$ .

**Príklad 3.** Nájdime intervaly monotónnosti funkcie

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}.$$

**Riešenie.**

Definičný obor funkcie  $f$  je  $D_f = R$ .

Derivácia funkcie  $f$  je

$$f'(x) = \frac{(1+x^2) - 2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

Hľadajme body, v ktorých je derivácia nulová. Riešme rovnicu

$$1 - x^2 = 0.$$

Korene tejto kvadratickej rovnice sú  $x_1 = -1$  a  $x_2 = 1$ .

Pretože  $f'(-2) < 0$ ,  $f'(0) = 1 > 0$  a  $f'(2) < 0$ .

Funkcia  $f$  je klesajúca na intervale  $(-\infty, -1]$ , a na  $[1, \infty)$  a rastúca na intervale  $[-1, 1]$ .

**Príklad 4.** Nájdime intervaly monotónnosti funkcie

$$f(x) = x \ln x.$$

**Riešenie.**

Definičný obor funkcie  $f$  je  $D_f = \mathbb{R}^+ = (0, \infty)$ .

Derivácia funkcie  $f$  je

$$f'(x) = \ln x + x \frac{1}{x} = \ln x + 1.$$

Derivácia je nulová v bode  $x = e^{-1}$ .

Pretože  $f'(1) = 1 > 0$  a  $f'(e^{-2}) = -1 < 0$ , je funkcia  $f$  klesajúca na intervale  $(0, e^{-1}]$ , a rastúca na intervale  $[e^{-1}, \infty)$ .

**Príklad 5.** Nájdime intervaly monotónnosti funkcie

$$f(x) = x^3.$$

**Riešenie.**

Definičný obor funkcie  $f$  je  $D_f = \mathbb{R}$ .

Derivácia funkcie  $f$  je

$$f'(x) = 3x^2.$$

Derivácia je nulová v bode  $x = 0$ ,

ale všimnime si, že  $f'(x) > 0$  aj pre záporné aj pre kladné  $x$ .

Teda funkcia je rastúca na  $(-\infty, 0]$  a aj na  $[0, \infty)$  a teda je rastúca na celom  $\mathbb{R}$ . (Vieme to overiť aj pomocou definície.)

#### LOKÁLNE EXTRÉMY

Už sme sa stretli s pojmom maximum a minimum funkcie  $f$ . Ak spojitá funkcia rastie do bodu  $x_0$  a potom klesá, tak v bode  $x_0$  je najväčšia hodnota funkcie vzhľadom na nejaké okolie bodu  $x_0$ . Takejto hodnote budeme hovoriť lokálne maximum.

**Definícia.** Nech  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  je funkcia definovaná, na intervale  $I$ .

Hovoríme, že funkcia  $f$  má v bode  $x_0$ :

- lokálne minimum, ak  $\exists O_\delta(x_0)$  také, že  $\forall x \in O_\delta(x_0)$  platí  $f(x) \geq f(x_0)$ ,
- ostré lokálne minimum, ak navyše  $\forall x \in O_\delta^\circ(x_0)$  platí  $f(x) > f(x_0)$ .
- lokálne maximum, ak  $\exists O_\delta(x_0)$  také, že  $\forall x \in O_\delta(x_0)$  platí  $f(x) \leq f(x_0)$ ,
- ostré lokálne maximum, ak navyše  $\forall x \in O_\delta^\circ(x_0)$  platí  $f(x) < f(x_0)$ .

V definícii sme nepotrebovali hovoriť o raste ani klesaní.

Ako teda súvisia intervaly monotónnosti a lokálne extrémny? Ak je funkcia diferencovateľná v okolí bodu  $x_0$  vieme použiť nasledujúcu vetu.

**Veta (o lokálnych extrémoch).** *Nech  $f : I \rightarrow R$  je funkcia spojitá, na intervale  $(a, b) \subset I$  a diferencovateľná na intervaloch  $(a, x_0)$ ,  $(x_0, b)$ .*

*Potom ak*

- $\forall x \in (a, x_0)$  platí  $f'(x) > 0$  a súčasne  $\forall x \in (x_0, b)$  platí  $f'(x) < 0$ , tak  $f$  má v bode  $x_0$  ostré lokálne maximum,
- $\forall x \in (a, x_0)$  platí  $f'(x) < 0$  a súčasne  $\forall x \in (x_0, b)$  platí  $f'(x) > 0$ , tak  $f$  má v bode  $x_0$  ostré lokálne minimum.

Ak je funkcia diferencovateľná na celom definičnom intervale, tak lokálne extrémymôžu byť v iných bodoch, ako v bodoch, kde je derivácia nulová.

**Veta (o nutnej podmienke).** *Nech  $f : I \rightarrow R$  je diferencovateľná funkcia.*

*Potom ak  $f$  má v bode  $x_0$  lokálny extrém tak musí byť  $f'(x_0) = 0$ .*

**Definícia.** Body  $x_0$ , v ktorých je  $f'(x_0) = 0$  nazývame stacionárne body.

Veta o nutnej podmienke je dobrý nástroj na hľadanie lokálnych extrémov diferencovateľných funkcií. Lokálne extrémymôžu byť len v stacionárnych bodoch.

Pripomeňme, že stacionárne body sme hľadali aj pri určovaní intervalov monotónnosti.

**Príklad 6.** Nájďme lokálne extrémym funkcie

$$f(x) = x^3 - 3x.$$

**Riešenie.**

Definičný obor funkcie  $f$  je  $D_f = R$ .

Stacionárne body sú  $x_1 = -1$  a  $x_2 = 1$ . Z výsledkov príkladu 1 vieme, že  $f$  je rastúca na intervale  $(-\infty, -1]$ , a na  $[1, \infty)$  a klesajúca na intervale  $[-1, 1]$ .

Preto bod  $x_1 = -1$  je bod ostrého lokálneho maxima a  $x_2 = 1$  je bodom ostrého lokálneho minima.

**Príklad 7.** Nájďme lokálne extrémym funkcie

$$f(x) = x \cdot e^{-x^2}.$$

**Riešenie.**

Definičný obor funkcie  $f$  je  $D_f = R$ .

Derivácia funkcie  $f$  je

$$f'(x) = (1 - 2x^2)e^{-x^2}.$$

Stacionárne body sú  $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$  a  $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

Z výsledkov príkladu 2 vieme, že funkcia  $f$  je klesajúca na intervale  $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}]$ , a na  $[\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty)$  a rastúca na intervale  $[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$ .

Preto bod  $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$  je bod ostrého lokálneho minima a  $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$  je bodom ostrého lokálneho maxima.

**Príklad 8.** Nájďme lokálne extrémym funkcie

$$f(x) = \frac{x}{1 + x^2}.$$

**Riešenie.**

Definičný obor funkcie  $f$  je  $D_f = \mathbb{R}$ .

Derivácia funkcie  $f$  je

$$f'(x) = \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2}.$$

Stacionárne body sú  $x_1 = -1$  a  $x_2 = 1$ .

Z výsledkov príkladu 3 vieme, že funkcia  $f$  je klesajúca na intervale  $(-\infty, -1]$ , a na  $[1, \infty)$  a rastúca na intervale  $[-1, 1]$ .

Preto bod  $x_1 = -1$  je bod ostrého lokálneho minima a  $x_2 = 1$  je bodom ostrého lokálneho maxima.

**Príklad 9.** Nájdime lokálne extrémym funkcie

$$f(x) = x \ln x.$$

**Riešenie.**

Definičný obor funkcie  $f$  je  $D_f = \mathbb{R}^+ = (0, \infty)$ .

Derivácia funkcie  $f$  je

$$f'(x) = \ln x + x \frac{1}{x} = \ln x + 1.$$

Stacionárny bod je  $x = e^{-1}$ .

Z výsledkov príkladu 3 vieme, že funkcia  $f$  je klesajúca na intervale  $(0, e^{-1}]$ , a rastúca na intervale  $[e^{-1}, \infty)$ .

Preto bod  $x_1 = e^{-1}$  je bod ostrého lokálneho minima.

**Príklad 10.** Nájdime lokálne extrémym funkcie

$$f(x) = x^3.$$

**Riešenie.**

Definičný obor funkcie  $f$  je  $D_f = \mathbb{R}$ .

Derivácia funkcie  $f$  je

$$f'(x) = 3x^2.$$

Derivácia je nulová v bode  $x = 0$ ,

ale funkcia nemá žiaden lokálny extrém

**Príklad 11.** Nájdime intervaly monotónnosti a lokálne extrémym funkcie

$$f(x) = \frac{x + 1}{x^2 - x}.$$

**Riešenie.**

Definičný obor funkcie  $f$  je  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ .

Derivácia funkcie  $f$  je

$$f'(x) = \frac{(x^2 - x) - (x + 1)(2x - 1)}{(x^2 - x)^2} = \frac{-x^2 - 2x + 1}{(x^2 - x)^2}.$$

Derivácia je nulová v bodoch v ktorých je  $-x^2 - 2x + 1 = 0$ .

Stacionárne body sú  $x_1 = -1 - \sqrt{2}$  a  $x_2 = -1 + \sqrt{2}$ .

Funkcia  $f$  je rastúca na intervale  $[-1 - \sqrt{2}, 0)$ , a na  $(0, -1 + \sqrt{2}]$  a klesajúca na intervaloch  $(-\infty, -1 - \sqrt{2}]$ ,  $[-1 + \sqrt{2}, 1)$  a na  $[1, \infty)$ .

Funkcia má bod ostrého lokálneho minima  $x_1 = -1 - \sqrt{2}$  a bod ostrého lokálneho maxima  $x_2 = -1 + \sqrt{2}$ .