

PREDNÁŠKA 3.

LIMITA FUNKCIE, POKRAČOVANIE

POROVNÁVANIE A LIMITA

Je prirodzené očakávať, že väčšia funkcia má väčšiu limitu. Presnejšie

Veta (o porovnaní).

Nech $f : A \rightarrow R$, $h : A \rightarrow R$, pričom $f(x) \leq h(x)$.

Nech existujú limity $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_1$ a $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = L_2$.

Potom $L_1 \leq L_2$.

Táto prirodzená veta má dva užitočné dôsledky.

Veta (o dvoch policajtoch). Nech $f : A \rightarrow R$, $g : A \rightarrow R$, $h : A \rightarrow R$, pričom $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Nech existujú limity $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = L$.

Potom aj $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L$.

Veta (o vynulovaní ohraničenej). Nech $f : A \rightarrow R$, $g : A \rightarrow R$. Nech existuje limita $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, a nech je funkcia $g(x)$ ohraničená.

Potom $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = 0$.

Prečítané ľudskou rečou, prvý dôsledok hovorí, že ak dve funkcie majú rovnakú limitu, tak každá funkcia medzi nimi má tú istú limitu.

Druhý dôsledok hovorí o súčine, ak jeden činiteľ ide k nule a druhý je ohraničený, tak súčin ide tiež k nule.

Príklad 9. Vypočítajme limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}.$$

Riešenie.

Argumentáciu urobíme len $x > 0$, pre x záporné sa odhady odvodí rovnako.

Najprv využijeme nerovnosť

$$\sin x \leq x$$

a z nej dostaneme

$$\frac{\sin x}{x} \leq 1.$$

Na druhej strane

$$x \leq \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

(táto nerovnosť platí pre $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$) a preto

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x}.$$

Pretože

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$$

a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1 = \lim_{x \rightarrow 0} 1$$

z vety o dvoch policajtoch dostaneme, že

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Tento výsledok budeme v ďalších výpočtoch používať bez odvodzovania.

Príklad 10. Vypočítajte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{5x}.$$

Riešenie.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5}.$$

V poslednom kroku sme využili, že ak $x \rightarrow 0$ tak aj $2x \rightarrow 0$. Tento krok bude obsahom všeobecnejšej vety o limite zloženej funkcie.

Príklad 11. Vypočítajte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}.$$

Riešenie.

Počítame limitu súčinu dvoch funkcií, z ktorých jedna má limitu nula

$$\lim_{x \rightarrow 0} x = 0,$$

a druhá

$$-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$$

je ohraničená. Preto

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

(Všimnime si, že samotná funkcia $\sin \frac{1}{x}$ v nule nemá limitu. Nakreslite si obrázok vhodným softvérom.)

Veta (o limite zloženej funkcie). *Nech $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow R$. Nech*

- *existuje limita $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$,*
- *existuje limita $\lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = L$,*
- *$f(x) \neq y_0$ na nejakom prstencovom okolí $O_\delta^c(x_0)$.*

Potom $\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = \lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = L$.

Príklad 12. Vypočítajme limitu

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1}}.$$

Riešenie.

Počítame limitu zloženej funkcie. Vnútoraná zložka je funkcia

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1}$$

jej limita je

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+3}{x+1} = 2.$$

Vonkajšia zložka je funkcia

$$g(y) = \sqrt{y}.$$

Teraz

$$\lim_{y \rightarrow 2} \sqrt{y} = \sqrt{2}.$$

Preto

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1}} = \sqrt{2}.$$

(Všimnime si, že je splnená aj tretia, technická podmienka, že $\frac{x+3}{x+1} \neq 2$ v okolíbodu $x = 1$.)

NEVLASTNÁ LIMITA

Vo vete o výpočte sme predpokladali, že všetky limity sú vlastné. (Pripomeňme: čísla.)

V nasledujúcej vete budeme riešiť situáciu, keď jedna z funkcií má limitu ∞ , alebo $-\infty$.

Budeme sa zaoberať len prípadom ∞ druhá možnosť sa líši len znamienkom.

Veta (o výpočte pre nevlastnú limitu). *Nech $f : A \rightarrow R, g : A \rightarrow R$.*

Nech existuje limita $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$.

Potom

- *ak je funkcia $g(x)$ ohraničená zdola, tak $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + g(x) = +\infty$,*
- *ak je funkcia $g(x)$ ohraničená zdola kladnou konštantou, tak $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = +\infty$,*
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.

Príklad 13. Vypočítajte limitu

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x + \frac{1}{x} = \infty.$$

Príklad 14. Vypočítajte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x + \frac{1}{x} = \infty.$$

Príklad 15. Vypočítajte limitu

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \operatorname{arctg} x = \infty.$$

Príklad 16. Vypočítajte limitu

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n} = 0.$$

Príklad 17. Vypočítajte limitu

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x - 1}{x^3 - 3x^2 + 5}.$$

Riešenie.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x - 1}{x^3 - 3x^2 + 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right)}{x^3 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{5}{x^3}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right)}{\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{5}{x^3}\right)} = 0.$$

Príklad 18. Vypočítajte limitu

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 3x^2 - 2x + 1}{x^3 - 3x^2 + 5}.$$

Riešenie.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 3x^2 - 2x + 1}{x^3 - 3x^2 + 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 \left(1 + \frac{3}{x^2} - \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4}\right)}{x^3 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{5}{x^3}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{3}{x^2} - \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4}\right)}{\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{5}{x^3}\right)} = \infty.$$

Príklad 19. Vypočítajte limitu

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + 3x^2 - 2x + 1}{3x^4 - 3x^2 + 5}.$$

Riešenie.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + 3x^2 - 2x + 1}{3x^4 - 3x^2 + 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 \left(2 + \frac{3}{x^2} - \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4}\right)}{x^4 \left(3 - \frac{3}{x^2} + \frac{5}{x^4}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(2 + \frac{3}{x^2} - \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4}\right)}{\left(3 - \frac{3}{x^2} + \frac{5}{x^4}\right)} = \frac{2}{3}.$$

Úloha. Zamyslite sa a sformulujte všeobecné pravidlo pre počítanie limity podielu dvoch polynómov v ∞ .

Ako doplnok uveďme ešte vlastnosť:

Veta. *Nech $f : A \rightarrow \mathbb{R}$,*

Nech $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ a nech $f(x) > 0$ na nejakom prstencovom okolí $O_\delta^\circ(x_0)$.

Potom $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.

Príklad 20. Vypočítajme limity

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{2n}} = \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} = \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} -\infty & \text{pre } n \text{ nepárne} \\ \infty & \text{pre } n \text{ párne.} \end{cases}$$