

## PREDNÁŠKA 2.

### LIMITA FUNKCIE

Okrem množiny reálnych čísel  $R$  budeme používať aj rozšírenú množinu reálnych čísel  $R^* = R \cup \{-\infty, \infty\}$ . Pretože znaky  $\pm\infty$  nie sú čísla, prvky množiny  $R^*$  budeme volať body.

Predstavte si, že máte agentúru, ktorá pre klienta robí prieskum verejnej mienky. Máte k dispozícii dáta za každý deň do dneška a vašou úlohou je urobiť odhad k zajtrajšiemu dňu.

Prenesené do sveta reálnych funkcií: Poznáme hodnotu funkcie v každom čísle  $x$ , okrem jedného. Našou úlohou je odhadnúť hodnotu funkcie v tomto čísle  $x_0$ . (Na rozdiel od motivačnej úlohy, teraz môžeme mať aj dáta z budúcnosti.)

Tento (kvalifikovaný) odhad budeme volať limita funkcie v bode  $x_0$ .

Dodali sme slovo kvalifikovaný, aby sme zdôraznili, že odhad nebudeme robiť ľubovoľne, ale podľa pevných pravidiel.

Predovšetkým je rozumné predpokladať, že hodnoty  $f(x)$ , v bodoch  $x$ , ktoré sú ďaleko od bodu  $x_0$  majú na výsledný odhad malý vplyv. Naopak hodnoty v bodoch blízko  $x_0$  odhad ovplyvňujú viac. Potrebujeme merať, čo je blízko. Na to slúži pojem okolie bodu.

Interval  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  nazývame  $\delta$  okolím čísla  $x_0$ . Pritom  $\delta > 0$  udáva maximálnu vzdialenosť od čísla  $x_0$ . Označujeme

$$O_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Pri odhade predpokladáme, že hodnota v bode  $x_0$  nie je známa. Preto okrem okolia, používame aj prstencové okolie čísla  $x_0$ .

Množinu

$$O_\delta^\circ(x_0) = (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$$

voláme prstencové okolie čísla  $x_0$ .

Interval  $O_\delta(\infty) = (\frac{1}{\delta}, \infty)$  nazývame  $\delta$  okolím bodu  $\infty$ . Rozmyslite si, že aj v tomto prípade čím je číslo  $\delta > 0$  menšie, tým je okolie  $O_\delta(\infty)$  menšie.

Analogicky je zavedené okolie bodu  $-\infty$ .

Na osi  $y$  zvykneme pre veľkosť okolia použiť písmeno  $\varepsilon$ .

Pomocou voľby  $\delta$  sa vieme dostať k bodu  $x_0$  ľubovoľne blízko. Pre účely odhadu ale potrebujeme, aby v číslach  $x$  blízko bodu  $x_0$  bola funkcia  $f$  definovaná. Na to slúži pojem hromadný bod.

Bod  $x_0$  nazývame hromadný bod definičného oboru  $A$  funkcie  $f$ , ak sa ľubovoľne blízko k nemu nachádza nejaký bod  $x \neq x_0$  z definičného oboru. Zapísané pomocou okolí,

$$O_\delta^\circ(x_0) \cap A \neq \emptyset.$$

Teraz už vieme vysloviť definíciu limity.

**Definícia.** Nech  $f : A \rightarrow R$ , a nech  $x_0$  je hromadný bod množiny  $A$ . Hovoríme, že funkcia  $f$  má v bode  $x_0$  limitu  $L \in R^*$ , ak

pre každé okolie  $O_\varepsilon(L)$  existuje okolie  $O_\delta^\circ(x_0)$ , také, že ak  $x \in O_\delta^\circ(x_0)$  tak potom  $f(x) \in O_\varepsilon(L)$ .

Značíme  $L = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ .

Toto je možno najťažšie čitateľná definícia z celého kurzu.

Prečítajme si ju pre prípad, keď  $L$  je číslo.

Hovorí, že  $L$  je kvalifikovaný odhad, ak pre hocijakú dopredu nastavenú odchýlku  $\varepsilon$  od odhadu  $L$  sa vieme dostať ku  $x_0$  tak blízko ( $O_\delta^\circ$ ), že už sa hodnoty  $f(x)$  líšia od odhadu  $L$  o menej ako  $\varepsilon$ .

Niekedy v texte použijeme aj označenie: ak  $x \rightarrow x_0$  tak  $f(x) \rightarrow L$ , čo čítame nasledovne: Ak  $x$  sa blíži k  $x_0$ , tak  $f(x)$  sa blíži k  $L$ .

Použitím definície vypočítame niektoré jednoduché limity.

### Príklad 1.

$$\lim_{x \rightarrow 3} 1 = 1,$$

a všeobecne

$$\lim_{x \rightarrow x_0} c = c.$$

### Riešenie.

Naozaj, ak pre hodnotu  $L = 1$  zvolíme akékoľvek  $\varepsilon > 0$ , tak hodnota funkcie  $f(x)$  sa od  $L$  líši o menej ako  $\varepsilon$ , (lebo je tiež presne 1) a to bez ohľadu na veľkosť  $\delta$ .

To isté platí aj vo všeobecnom prípade.

### Príklad 2.

$$\lim_{x \rightarrow 2} x = 2,$$

a všeobecne

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0.$$

### Riešenie.

Teraz ak pre hodnotu  $L = 2$  zvolíme  $\varepsilon > 0$ , tak pri voľbe  $\delta = \varepsilon$  sa na okolí  $O_\delta^\circ$  hodnota funkcie  $f(x) = x$  líši od  $L$  o menej ako  $\varepsilon$ .

Tak isto volíme  $\delta = \varepsilon$  aj vo všeobecnom prípade.

### Príklad 3.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty,$$

### Riešenie.

Tento výsledok je obsiahnutý vo všeobecnom prípade príkladu 2, len si aj slovne uvedomme, že ak  $x \rightarrow \infty$  tak aj  $f(x) \rightarrow \infty$ , pretože  $f(x) = x$ .

Poznamenaajme, že ak  $L$  je číslo, hovoríme o vlastnej limite a ak  $L = -\infty$  alebo  $L = \infty$  hovoríme o nevlastnej limite.

## VÝPOČET LIMITY

Počítanie limít pomocou definície je pomerne zdĺhavé a používame ho len keď nemáme inú možnosť.

Tou inou možnosťou sú pravidlá výpočtu limít.

**Veta o výpočte vlastnej limity.** *Nech  $f : A \rightarrow R$ ,  $g : A \rightarrow R$  a nech existujú vlastné limity  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_1$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L_2$ .*

*Potom*

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + g(x) = L_1 + L_2$ ,
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = L_1 \cdot L_2$ ,
- ak naviac  $L_2 \neq 0$ , tak  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$ .

**Príklad 4.** Vypočítajte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 3x + 7$$

**Riešenie.** Použijeme vetu a výsledky Príkladov 1 a 2.

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 3x + 7 = \lim_{x \rightarrow 2} x \cdot \lim_{x \rightarrow 2} x - \lim_{x \rightarrow 2} 3 \cdot \lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} 7 = 4 - 6 + 7 = 5.$$

**Veta (o zúžení).** *Nech  $f : A \rightarrow R$ ,  $g : A_1 \rightarrow R$  pričom  $A_1 \subset A$  a nech  $x_0$  je hromadný bod  $A_1$ . Nech existuje limita  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ .*

*Potom aj  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L$ .*

**Príklad 5.** Vypočítajte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

**Riešenie.**

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2}.$$

Funkcia nie je definovaná v bode  $x_0 = 2$ . Krátenie v zlomku vedie k rozšíreniu definičného oboru. Ak má rozšírenie limitu, tak tú istú limitu má aj zúženie.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} x + 2 = 4.$$

**Príklad 6.** Vypočítajte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{\sqrt{x + 1} - \sqrt{7 - x}}$$

**Riešenie.**

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-\sqrt{7-x}} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(\sqrt{x+1}+\sqrt{7-x})}{(\sqrt{x+1}-\sqrt{7-x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{7-x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(\sqrt{x+1}+\sqrt{7-x})}{2x-6} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{7-x}}{2} = 2\end{aligned}$$

**Príklad 7.** Vypočítajte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} |\operatorname{sgn} x|$$

**Riešenie.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} |\operatorname{sgn} x| = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1.$$

Naozaj funkcia  $|\operatorname{sgn} x| = 1$  pre  $x \neq 0$ . Všimnime si, že limita v nule je 1 a nezhoduje sa s funkčnou hodnotou v nule,  $\operatorname{sgn} |0| = 0$ .

#### JEDNOSTRANNÉ LIMITY

Zavedieme dve špeciálne zúženia funkcie  $f : A \rightarrow R$ .

Pri zúžení na množinu  $A_- = A \cap (-\infty, x_0)$  hovoríme o limite zľava v bode  $x_0$ . Značíme  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L^-$ .

Pri zúžení na množinu  $A_+ = A \cap (x_0, \infty)$  hovoríme o limite sprava v bode  $x_0$ . Značíme  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L^+$ .

Z vety o zúžení plynie nasledujúca veta.

**Veta (o existencii).** *Nech  $f : A \rightarrow R$ , a nech existujú limity sprava aj zľava,*

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L^- \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L^+.$$

*Potom*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

*práve vtedy, keď*

$$L^+ = L^- = L$$

.

Z tejto vety je najdôležitejšia skutočnosť, že ak sa limity zľava a sprava nerovnejú, tak funkcia nemá v čísle  $x_0$  limitu.

**Príklad 8.** Vypočítajte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sgn} x$$

**Riešenie.**

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{sgn} x &= \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{sgn} x &= \lim_{x \rightarrow 0^-} -1 = -1.\end{aligned}$$

Pretože  $1 \neq -1$  funkcia  $\operatorname{sgn}(x)$  nemá v bode 0 limitu.