

PREDNÁŠKA 13.

KRITÉRIÁ KONVERGENCIE

Pretože úloha nájsť súčet nekonečného radu je vo všeobecnosti ťažká, pokúsime sa aspoň zistiť, či rad vôbec nejaký konečný súčet má (je konvergentný) alebo nie (je divergentný).

V tejto kapitole uvedieme niekoľko často používaných kritérií.

1. Nutná podmienka konvergenzie.

Intuitívne je jasné, že ak pripočítavame čísla a_n , ktoré sú väčšie ako kladná konštanta k , teda ak sa v každom kroku súčet zväčší aspoň o k , tak postupnosť čiastočných súčtov bude divergovať do nekonečna.

Aby mohol rad konvergovať, potrebujeme členy a_n znižovať pod akúkoľvek kladnú konstantu k . Teda $a_n \rightarrow 0$.

Presnejšie: (a aj bez predpokladu nezápornosti a_n)

Ak rad

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$$

konverguje, t.j. existuje konečná limita postupnosti čiastočných súčtov

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n,$$

tak aj o jeden krok oneskorená limita je rovnaká

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1}.$$

Rozdiel posledných dvoch rovností je

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

(Pripomeňme, že $S_n = a_1 + \dots + a_{n-1} + a_n$ a $S_{n-1} = a_1 + \dots + a_{n-1}$.)

Teda a_n musí mať limitu 0.

Veta o nutnej podmienke. *Nech rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je konvergentný číselný rad.*

Potom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Veta o nutnej podmienke umožňuje dokázať že rad diverguje ak $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$.

Príklad 1. Zistíme, či rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{1}{n}$$

konverguje alebo nie.

Riešenie.

Pretože $a_n = \cos \frac{1}{n}$, počítajme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{1}{n} = \cos 0 = 1 \neq 0.$$

Rad nespĺňa nutnú podmienku, preto je divergentný.

Treba ale hneď povedať, že ak je aj nutná podmienka splnená, ešte to neznamená, že rad je konvergentný.

Ukazuje to aj nasledujúci, dôležitý príklad.

Príklad 2 (Harmonický rad). Zistíme, či rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

konverguje alebo nie.

Riešenie.

Počítajme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Nutná podmienka je teda splnená.

Ukážeme, že napriek tomu je harmonický rad divergentný.

Počítajme čiastočné súčty

$$S_1 = 1, \quad S_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

Ďalej budeme odhadovať.

$$S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 2,$$

$$S_8 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) = 2 + \frac{1}{2}.$$

A všeobecne

$$S_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n} > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \dots + 2^{n-1} \left(\frac{1}{2^n}\right) = 1 + n \frac{1}{2}.$$

Preto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + n \frac{1}{2}\right) = \infty,$$

a teda, napriek splnenej nutnej podmienke, harmonický rad diverguje do ∞ .

2. Porovnávacie kritérium.

Na rozdiel od nutnej podmienky je porovnávacie kritérium určené len pre rady s nezápornými členmi $a_n \geq 0$.

Tiež vieme rozhodnúť nielen o divergencii, ale aj o konvergencii porovnávaného radu.

Hlavná myšlienka je porovnať rad, o konvergencii ktorého chceme rozhodnúť, s radom známym.

Ak známy rad s menšími sčítancami diverguje, tak aj rad s väčšími sčítancami diverguje.

Podobne ak známy rad s väčšími sčítancami konverguje, tak aj rad s menšími (ale nezápornými) sčítancami konverguje.

Formálne znenie je v nasledujúcej vete.

Veta. Nech $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ sú nekonečné číselné rady.

Nech $\forall n \geq n_0$ platí

$$0 \leq a_n \leq b_n.$$

Potom:

- Ak rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverguje, tak aj rad $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ diverguje.
- Ak rad $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konverguje, tak aj rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje.

Príklad 3. Zistíme, či rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

konverguje alebo nie.

Riešenie.

Pretože $b_n = \frac{1}{n^2}$, porovnajme rad zo zadania s radom

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1}$$

O tomto rade vieme, že je konvergentný. (A vieme aj nájsť jeho súčet.)

Súčasne je

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n^2 - 1} \quad \text{pre } n \geq 2.$$

Preto aj rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

konverguje.

Príklad 4. Zistíme, či rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

konverguje alebo nie.

Riešenie.

Porovnajme rad zo zadania s radom

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

o ktorom vieme, že je divergentný.

Súčasne je

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{pre } n \geq 1.$$

Preto aj rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

diverguje.

Tvrdenie. Rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ diverguje pre $0 < \alpha \leq 1$, a konverguje pre $\alpha > 1$.

Príklad 5. Zistíme, či rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^3+2n+3}$$

konverguje alebo nie.

Riešenie.

Zrejme je

$$\frac{n+1}{n^3+2n+3} \leq \frac{2n}{n^3} = \frac{2}{n^2}.$$

(Zväčšili sme čitateľa a zmenšili menovateľa.)

Ale rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

konverguje, a preto aj menší rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^3+2n+3}$$

konverguje.

Veta. Nech $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ sú nekonečné číselné rady s nezápornými členmi.

Nech existuje konečná limita $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = k \neq 0$.

Potom oba rady majú rovnaký charakter konvergencie.

vskip2mm

Príklad 6. Zistíme, či rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$$

konverguje alebo nie.

Riešenie.

Počítajme limitu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1.$$

Pretože je konečná a kladná, majú rady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n} \quad \text{a tiež} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

rovnaký charakter konverencie. Ale o harmonickom rade

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

vieme, že diverguje. Preto aj rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$$

diverguje.