Opakovaná matematika 1 - Banská Bystrica

časový rozvrh výučby predmetu.

1 Sústavy lineárnych rovníc (Gaussova eliminácia). (vyriešte aspoň 5 príkladov do 12.2.2007 - kontrola a konzultácia)

1. Rozhodnite, či sú ekvivaletné sústavy lineárnych rovníc $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$, ak

   (a) $\mathcal{S}_1: \begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & 2 \\ x_1 & - & 3x_2 & - & 2x_3 & = & 1 \end{array}$ $\quad \mathcal{S}_2: \begin{array}{rcrcrcr} 2y_1 & + & y_2 & - & 3y_3 & = & 2 \\ y_1 & + & 4y_2 & - & y_3 & = & 1 \end{array}$ [áno]

   (b) $\mathcal{S}_1: \begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & 2 \\ x_1 & - & 3x_2 & - & 2x_3 & = & 1 \end{array}$ $\quad \mathcal{S}_2: \begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & = & 3 \end{array}$, [nie]

   Riešte sústavy lineárnych rovníc

2. $\begin{array}{rcrcrcr} 12x_1 & - & x_2 & + & 5x_3 & = & 30 \\ 3x_1 & - & 13x_2 & + & 2x_3 & = & 21 \\ 7x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 15 \end{array}$, $[K = \{(2, -1, 1)\}]$

3. $\begin{array}{rcrcrcr} 4x_1 & + & 3x_2 & + & 6x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & + & 5x_2 & + & 4x_3 & = & 10 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = & -9 \end{array}$, $[K = \{(1-18t, 3+2t, -2+11t),\ t \in \mathbf{R}\}]$

4. $\begin{array}{rcrcrcr} 7x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ -x_1 & + & 6x_2 & - & 3x_3 & = & 2 \\ -10x_1 & + & 15x_2 & - & 11x_3 & = & 4 \end{array}$, [nemá riešenie]

5. $\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x_1 & - & x_2 & - & 6x_3 & - & 4x_4 & = & 2 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & - & 2x_4 & = & 12 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & - & 3x_3 & + & 4x_4 & = & -1 \\ 5x_1 & + & 4x_2 & - & 9x_3 & & & = & 5 \end{array}$,

   $\left[K = \left\{\left(0, 2, \frac{1}{3}, -\frac{3}{2}\right)\right\}\right]$

6. $\begin{array}{rcrcrcrcr} 5x_1 & + & 5x_2 & + & 4x_3 & + & 7x_4 & = & 5 \\ 11x_1 & + & 4x_2 & + & 6x_3 & & & = & 4 \\ 4x_1 & + & 5x_2 & + & 5x_3 & + & 9x_4 & = & 8 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 5x_4 & = & 3 \\ 9x_1 & + & 4x_2 & + & 8x_3 & + & 4x_4 & = & 10 \end{array}$,

   $\left[K = \left\{\left(-\frac{6}{7} + 8s, \frac{1}{7} - 13s, \frac{15}{7} - 6s, 7s\right),\ s \in \mathbf{R}\right\}\right]$

7. $$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 3x_1 & + & 3x_2 & + & 7x_3 & - & 3x_4 & + & 6x_5 & = & 3 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & & & = & -1 \\ 4x_1 & + & 4x_2 & + & 12x_3 & - & 4x_4 & + & 12x_5 & = & 4 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & - & x_4 & + & 3x_5 & = & 2 \end{array}$$, [nemá riešenie]

8. $$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 4x_1 & + & 8x_2 & + & 8x_3 & - & 6x_4 & + & 4x_5 & = & 9 \\ 5x_1 & + & 4x_2 & + & 10x_3 & - & 6x_4 & + & 2x_5 & = & 15 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 2x_4 & + & x_5 & = & 4 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & + & 5x_3 & - & 5x_4 & + & 4x_5 & = & 10 \end{array}$$,

$\left[K = \left\{\left(a, b, -\frac{9}{2} - a - 2b, -\frac{25}{2} - 2a - 4b, -\frac{15}{2} - 2a - 4b\right),\ a, b \in \mathbf{R}\right\}\right]$

2 Polynómy. (vyriešte aspoň 5 príkladov do 19.2.2007 - kontrola a konzultácia)

1. Vynásobte polynómy: $(3x^3 + (1-i)x^2 + ix - 2 + i)(3x^3 + (1+i)x^2 - ix - 2 - i)$.

   $\left[9x^6 + 6x^5 + 2x^4 - 14x^3 - 5x^2 + 2x + 5\right]$

2. Vydeľte so zvyškom: $(2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6) : (x^2 - 3x + 1)$.

   (a) $\left[\begin{array}{l}\text{podiel: } 2x^2 + 3x + 11 \\ \text{zvyšok: } 25x - 5\end{array}\right]$

3. Vydeľte so zvyškom pomocou Hornerovej schémy :

   $(x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 8) : (x - 1)$

   (a) $\left[(x-1)(x^3 - x^2 + 3x - 3) + 5\right]$

4. Zistite koľkonásobným koreňom polynómu f je číslo c:

   (a) $f(x) = x^6 - 4x^5 + 6x^4 - 8x^3 + 10x^2 - 8x + 8,\ c = 2$ [dvojnásobný]

   (b) $f(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8,\ c = 2$ [trojnásobný]

   (c) $f(x) = x^5 + 7x^4 + 16x^3 + 8x^2 - 16x - 16,\ c = -2$ [štvornásobný]

5. Nájdite racionálne korene polynómov:

   (a) $6x^4 - 11x^3 - x^2 - 4.$ $\left[-\frac{2}{3},\ 2\right]$

   (b) $10x^4 - 13x^3 + 15x^2 - 18x - 24.$ [nemá racionálne korene]

   (c) $24x^5 + 10x^4 - x^3 - 19x^2 - 5x + 6.$ $\left[\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right]$

6. Nájdite kanonický rozklad polynómov nad $\mathbf{R}$:

   (a) $x^4 + 4.$

   $\left[(x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)\right]$

   (b) $x^6 - 8.$

   $\left[(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x^2 + \sqrt{2}x + 2)(x^2 - \sqrt{2}x + 2)\right]$

   (c) $4x^4 + x^2 + 1.$

   $\left[4\left(x^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}\right)\left(x^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}\right)\right]$

   (d) $2x^6 + 3x^5 + x^3 + 3x^2 - 1.$

   $\left[2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x+1)^3(x^2 - x + 1)\right]$

3 Racionálne funkcie a elementárne zlomky. (vyriešte aspoň 5 príkladov do 19.2.2007 - kontrola a konzultácia)

1. Rozložte na elementárne zlomky nad **R** racionálnu funkciu:

   (a) $\dfrac{6x^2+7x+4}{2x^3+3x^2-1}$.

   $\left[\dfrac{4}{2x-1}-\dfrac{1}{(x+1)^2}+\dfrac{1}{x+1}\right]$

   (b) $\dfrac{x^6-5x^5+13x^4-18x^3+12x^2-8x+12}{(x-2)(x^2-2x+2)^2}$.

   $\left[x+1+\dfrac{3}{x-2}+\dfrac{x-6}{(x^2-2x+2)^2}+\dfrac{2}{x^2-2x+2}\right]$

   (c) $\dfrac{4x^5-8x^4+5x^3-x^2+x+1}{(2x^2-x)^2}$.

   $\left[x-1+\dfrac{6}{(2x-1)^2}-\dfrac{10}{2x-1}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{5}{x}\right]$

   (d) $\dfrac{x^6+x^5}{(x^3-1)(x^2+x+1)}$.

   $\left[x+\dfrac{x-1}{3(x^2+x+1)^2}+\dfrac{-11x+5}{9(x^2+x+1)}+\dfrac{2}{9(x-1)}\right]$

   (e) $\dfrac{-x^4-3x^3+10x^2-4x+1}{(x-1)(x^4-x^3-x+1)}$.

   $\left[\dfrac{1}{(x-1)^3}-\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{x-2}{x^2+x+1}\right]$

4 Dňa 19.2.2007prvá zápočtová písomka z M1.

5 Matice - hodnosť a maticové operácie, inverzná matica. (vyriešte aspoň 5 príkladov do 26.2.2007 - kontrola a konzultácia)

1. Určte hodnosť matíc:

   (a) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ [2]

   (b) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -6 & 2 \end{pmatrix}$ [1]

   (c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ [5]

   (d) $\begin{pmatrix} 81 & 90 & 67 & 107 \\ 21 & 15 & 23 & 11 \\ 39 & 60 & 21 & 85 \\ 99 & 135 & 65 & 181 \\ 120 & 150 & 88 & 192 \end{pmatrix}$ [2] .

2. Pre matice **A** až **P** vypočítajte:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = (-1,\ 0,\ 2), \qquad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{O} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{P} = (2,\ 0,\ -1,\ 3)$$

   (a) $3\mathbf{E} + \mathbf{J}$ $\left[\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\right]$

   (b) $2\mathbf{A} - 3\mathbf{G}$ [nie je definované]

   (c) $\mathbf{D}^T,\ \mathbf{F}^T$ $\left[\mathbf{D}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix},\ \mathbf{F}^T = (1,\ 0,\ 3,\ 4)\right]$

(d) $-2\mathbf{G} - 5\mathbf{H}^T$ $\left[\begin{pmatrix} -7 & -4 & 0 \\ 4 & 0 & 6 \\ -15 & -1 & -10 \end{pmatrix}\right]$

(e) $\mathbf{AD}$ $\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 0 & 11 \end{pmatrix}\right]$

(f) $\mathbf{PF}$ $[11]$

(g) $\mathbf{FP}$ $\left[\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & -3 & 9 \\ 8 & 0 & -4 & 12 \end{pmatrix}\right]$

(h) $\mathbf{K}^2$ $\left[\begin{pmatrix} \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix}\right]$

(i) $\mathbf{GLD}^T$ $\left[\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -15 \\ -5 & 31 \end{pmatrix}\right]$

3. Vypočítajte inverznú maticu k matici:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\left[\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$

(c) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 5 & -8 \\ 2 & 7 & -10 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\right]$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ $\left[\frac{1}{12}\begin{pmatrix} 24 & -12 & 12 & -12 \\ -6 & 9 & -9 & 6 \\ 8 & -4 & 8 & -8 \\ -6 & 3 & -3 & 6 \end{pmatrix}\right]$

6 Sústavy lineárnych rovníc (Frobeniova veta). (vyriešte všetky príklady do 26.2.2007 - kontrola a konzultácia)

1. Riešte sústavu lineárnych rovníc v závislosti od parametra $a \in \mathbf{R}$:

$$\begin{array}{ccccccc} x & - & 6y & + & 2z & = & -4a-2 \\ 3x & + & 3y & + & 4z & = & 3a-6 \\ 2x & - & 33y & + & 6z & = & -21a \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{c} \emptyset \text{ pre } a \neq -2 \\ \left\{ \left(-24-15t,\, t,\, 15+\frac{21}{2}t \right);\ t \in \mathbf{R} \right\} \text{ pre } a=-2 \end{array} \right]$$

2. Riešte sústavu lineárnych rovníc v závislosti od parametrov $a, b \in \mathbf{R}$:

$$\begin{array}{ccccccc} ax & + & y & + & z & = & 1 \\ 6x & - & 3y & + & bz & = & 2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{c} a=-2,\ b=-3 : K=\emptyset \\ a=-2, b\neq -3 : K = \left\{ \left(t,\, 1-at-\frac{5}{b+3}, \frac{5}{b+3} \right);\ t \in \mathbf{R} \right\} \\ a \neq -2, b \in \mathbf{R} : K = \left\{ \left(\frac{5-(b+3)t}{6+3a}, 1-t-a\frac{5-(b+3)t}{6+3a}, t \right);\ t \in \mathbf{R} \right\} \end{array} \right]$$

3. Použitím Frobeniovej vety rozhodnite, či systémy lineárnych rovníc majú riešenie a vyriešte ich

(a) $\begin{array}{l} x-2y+2z=-9 \\ 3x-5y+4z=10 \\ 5x-12y+6z=29 \end{array}$ $\quad [(28, 0, -\frac{37}{2})]$

(b) $\begin{array}{l} x_1+2x_2-x_3=2 \\ 3x_1-x_2+2x_3=7 \\ x_1-x_3=-2 \\ 2x_1+x_2+x_3=7 \end{array}$ $\quad [(1, 2, 3,)]$

(c) $\begin{array}{l} 2x_1-2x_2+x_3=4 \\ x_1+x_2-x_3=-1 \\ 3x_1-7x_2-2x_3=-1 \\ -2x_1+5x_2+x_3=1 \end{array}$ $\quad$ [nemá riešenie]

7 Determinanty. (vyriešte aspoň 5 príkladov do 5.3.2007 - kontrola a konzultácia)

1. Vypočítajte:

   (a) $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}$ $\qquad [-7]$

   (b) $\begin{vmatrix} 2-i & -i \\ 3+i & 1-i \end{vmatrix}$ $\qquad [0]$

   (c) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 4 & -5 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ $\qquad [-29]$

2. Napíšte rozvoj podľa 2. stĺpca:

   (a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$,

   $\left[-2\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} - 8\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}\right]$

   (b) $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & 6 & -1 & -2 \end{vmatrix}$,

   $\left[2\begin{vmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 3 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}\right]$

3. Vypočítajte:

   (a) $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 & a \\ 4 & -1 & 0 & b \\ 3 & 0 & -2 & c \\ 3 & 6 & -1 & d \end{vmatrix}$ $\qquad [-51a + 84b - 75c - 3d]$

   (b) $\begin{vmatrix} 5 & 2 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & -9 & 6 \\ -4 & -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$ $\qquad [-6]$

   (c) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ $\qquad [-10]$

(d) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & -2 & 7 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 5 & 5 & 1 & -4 & 8 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ [0]

(e) $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 7 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 5 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 7 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 5 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 7 \end{vmatrix}$ [6700]:

4. Pomocou determinantov vypočítajte, pre aké hodnoty parametrov $a, b \in \mathbf{R}$ je matica $\mathbf{A}$ regulárna:

(a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & -2 & b \\ -2 & b & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $[a \neq b, b \neq 2]$

(b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -a \\ 1 & 1 & -a & 1 \\ 1 & -a & 1 & 1 \\ -a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $[a \neq -1,\ 3]$

(c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ $[a \neq \pm b]$

5. Pomocou determinantov vypočítajte inverznú maticu k matici:

(a) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ $\left[\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\right]$

(b) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 5 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\left[\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 5 & -4 & 7 \\ -11 & 11 & -11 \\ 7 & -10 & 12 \end{pmatrix}\right]$

6. Riešte sústavu lineárnych rovníc (použite Cramerove pravidlo, pokiaľ je to možné):

(a) $\begin{aligned} 3x-4y+5z &= 1 \\ 2x-3y+z &= -1 \\ 3x-5y-z &= 2 \end{aligned}$ $[(-59, -37, 6)]$

(b) $\begin{array}{r} ax+\ \ \ y+z=4 \\ x+\ by+z=3 \\ x+2by+z=4 \end{array}$; $a, b \in \mathbf{R}$

$$\left[\begin{array}{l} a \neq 1,\ b \neq 0\ :\left\{\dfrac{1}{b(1-a)}(1-2b, 1-a, 4b-2ab-1)\right\} \\ a=1,\ b=\dfrac{1}{2}:\{(2-t, 2, t); t \in \mathbf{R}\} \\ a \in \mathbf{R}, b=0\ :\emptyset \\ a=1, b \neq \dfrac{1}{2}\ :\emptyset \end{array}\right]$$

8

Dňa 5.3.2007druhá zápočtová písomka z M1.

9 Funkcie - základné vlastnosti. (vyriešte aspoň 5 príkladov do 12.3.2007 - kontrola a konzultácia)

1. Nájdite definičný obor funkcie $f(x) = \frac{\sqrt{x+4}-2}{\sin 2x} + \log\left(1-x^2\right)$. $\left[D(f) = (-1,0)\cup(0,1)\right]$
2. Nájdite definičný obor funkcie $f(x) = \ln\left(1-\log\left(x^2-5x+16\right)\right)$. $\left[D(f) = (2,3)\right]$
3. Nájdite definičný obor funkcie $f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x+2}} + \sqrt{\frac{1-x}{\sqrt{1+x}}}$. [Funkcia nie je nikde definovaná]
4. Nájdite definičný obor funkcie $f(x) = \left(x^2+x+1\right)^{-\frac{3}{2}}$. $\left[D(f) = \mathbf{R}\right]$
5. Nájdite definičný obor funkcie $f(x) = \ln\frac{x-5}{x^2-10x+24} - \sqrt[3]{x+5}$. $\left[D(f) = (4,5)\cup(6,\infty)\right]$
6. *Daná je funkcia $f(x) = \log\left(\frac{x^2-2}{x}\right)$. Nájdite
   (a) definičný obor funkcie, $\left[D(f) = \left(-\sqrt{2},0\right)\cup\left(\sqrt{2},\infty\right)\right]$
   (b) všetky reálne čísla, pre ktoré je $f(x) > 0$. [Ak $x \in (-1,0)\cup(2,\infty)$, potom $f(x) > 0$.]
7. Nájdite definičný obor funkcie a zistite, či je párna, alebo nepárna ak $f(x) = \frac{x}{\log(1-x)}$. $[D(f) = (-\infty,0)\cup(0,1)$, f ani párna ani nepárna]
8. Nájdite definičný obor funkcie a zistite, či je párna, alebo nepárna ak $f(x) = x\left[\log(x+1) - \log x\right]$. $[D(f) = (0,\infty)$, f ani párna ani nepárna]
9. *Nájdite definičný obor funkcie a zistite, či je párna, alebo nepárna ak $f(x) = 1-\sqrt{2\cos 2x}$. $\left[D(f) = \cup_{k\in\mathbf{Z}}\left\langle -\frac{\pi}{4}+k\pi, \frac{\pi}{4}+k\pi\right\rangle\right.$, párna]
10. *Nájdite definičný obor funkcie a zistite, či je párna, alebo nepárna ak $f(x) = \frac{a^x-a^{-x}}{2}$, $a>0$. $[D(f) = \mathbf{R}$, nepárna funkcia]
11. Pre funkciu $f(x) = |x|$ nájdite definičný obor, podmnožiny definičného oboru, na ktorých je funkcia rastúca alebo klesajúca, zistite či je ohraničená a načrtnite jej graf.
    [$D(f) = \mathbf{R}$, na $(-\infty,0)$ je klesajúca, na $(0,\infty)$ je rastúca, zdola ohraničená $\min_{x\in\mathbf{R}} f(x) = f(0) = 0$, nie je zhora ohraničená]
12. *Pre funkciu $f(x) = |x|-x$ nájdite definičný obor, podmnožiny definičného oboru, na ktorých je funkcia rastúca alebo klesajúca, zistite či je ohraničená a načrtnite jej graf. [$D(f) = \mathbf{R}$, $f(x) = |x|-x = \begin{cases} -2x & \text{pre } x<0 \\ 0 & \text{pre } x\geq 0 \end{cases}$, na $(-\infty,0)$ je klesajúca, na $(0,\infty)$ je konštantná, zdola ohraničená $\min_{x\in\mathbf{R}} f(x) = 0$.]
13. Pre funkciu $f(x) = 1-\cos x$ určte definičný obor, podmnožiny definičného oboru, na ktorých je funkcia rastúca alebo klesajúca, zistite či je ohraničená,

nájdite jej supremum, infimum, maximum, minimum a načrtnite jej graf.
$$\left[\begin{array}{c} D(f)=\mathbf{R}, \text{ na intervaloch } (2k\pi,\pi+2k\pi) \text{ je rastúca,} \\ \text{na intervaloch } (-\pi+2k\pi,2k\pi) \text{ je klesajúca, } \min_{x\in\mathbf{R}} f(x)=f(2k\pi)=0, \\ \max_{x\in\mathbf{R}} f(x)=f(\pi+2k\pi)=2. \end{array}\right]$$

14. Nájdite definičný obor funkcie, obor funkčných hodnôt. Nájdite inverznú funkciu, ak $f(x)=\sqrt[3]{x^2+1}$. $\left[\begin{array}{c} D(f)=\mathbf{R}, H(f)=\langle 1,\infty), \text{ zdola ohraničená } \min_{x\in\mathbf{R}} f(x)=f(0)=1. \\ \text{Nie je prostá, preto nemá inverznú funkciu.} \end{array}\right.$

15. *Nájdite definičný obor funkcie, obor funkčných hodnôt. Nájdite inverznú funkciu. Načrtnite graf funkcie aj inverznej funkcie, ak $f(x)=-4+3\sqrt{x}$. $\left[D(f)=\langle 0,\infty), H(f)=\langle -4,\infty), \text{ je prostá } f^{-1}:\langle -4,\infty)\longrightarrow\langle 0,\infty), f^{-1}(x)=\left(\frac{x+4}{3}\right)^2\right]$

16. *Nájdite definičný obor funkcie, obor funkčných hodnôt. Nájdite inverznú funkciu. Načrtnite graf funkcie aj inverznej funkcie, ak $f(x)=1+\ln(x+2)$. $\left[D(f)=(-2,\infty), H(f)=\mathbf{R}, \text{ je prostá } f^{-1}:\mathbf{R}\longrightarrow(-2,\infty), f^{-1}(x)=-2+e^{x-1}.\right]$

10 Limita a spojitosť funkcie. (vyriešte aspoň 5 príkladov do 19.3.2007 - kontrola a konzultácia)

1. *Vypočítajte limitu $\lim_{x\to 2} \frac{x^2+5}{x^2-3}$. [9]

2. Vypočítajte limitu $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1}{x^3-x}$. [0]

3. *Vypočítajte limitu $\lim_{x\to \frac{1}{2}} \frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$. [6]

4. *Vypočítajte limitu $\lim_{x\to 1^+} \frac{x^3+x-2}{x^3-x^2-x+1}$. $[+\infty]$

5. *Vypočítajte limity v bodoch, v ktorých funkcia $f(x) = \frac{1}{|x^2-16|}$ nie je definovaná. Zistite, či je ohraničená a načrtnite približne jej graf. [Funkcia nie je definovaná v bodoch, kde je $\left|x^2-16\right| = 0$, t.j. $x_{1,2} = \pm 4$. Tak máme $D(f) = (-\infty,-4)\cup(-4,4)\cup(4,\infty) = \mathbf{R}\setminus\{-4,4\}$. Vypočítame limitu iba v bode $a=-4$. Limity v bode $a=4$ vypočítame podobne: $\lim_{x\to -4^-} \frac{1}{|x^2-16|} = \infty$, $\lim_{x\longrightarrow -4^+} \frac{1}{|x^2-16|} = \infty$, odkiaľ plynie, že funkcia nie je zhora ohraničená. Pretože platí $\frac{1}{|x^2-16|} > 0$, funkcia f je zdola ohraničená.]

6. Vypočítajte limity v bodoch, v ktorých funkcia $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$ nie je definovaná. Zistite, či je ohraničená a načrtnite približne jej graf.[Funkcia nie je definovaná v bodoch, kde je $x^2-4=0$, t.j. $x_{1,2} = \pm 2$. Tak máme $D(f) = (-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,\infty) = \mathbf{R}\setminus\{-2,2\}$. Vypočítame limitu iba v bode $a=-2$. Limity v bode $a=2$ vypočítame podobne. $\lim_{x\to -2^-} \frac{x}{x^2-4} = -\infty$, $\lim_{x\to -2^+} \frac{x}{x^2-4} = \infty$, odkiaľ plynie, že funkcia nie je zdola ani zhora ohraničená.]

7. *Vypočítajte limitu $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3}{2x^2-1} - \frac{x^2}{2x+1}\right)$. $\left[\frac{1}{4}\right]$

8. *Daná je funkcia $f(x) = \frac{x}{|\mathrm{tg}\, x|}$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

   (a) Vypočítajte limity v krajných bodoch definičného oboru a v bode 0. $\left[\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} \frac{x}{|\mathrm{tg}\, x|} = 0,\ \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{x}{|\mathrm{tg}\, x|} = 0,\ \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{|\mathrm{tg}\, x|} = 1,\ \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{|\tan x|}\frac{x}{|\mathrm{tg}\, x|} = -1.\right]$

   (b) Zistite, či je daná funkcia párna, alebo nepárna. [nepárna]

9. *Vypočítajte limitu $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x}-x}$. $[-1]$

10. *Vypočítajte limitu $\lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$. $\left[\frac{1}{2}\right]$

11. *Vypočítajte limitu $\lim_{x\to-\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$. $[-\infty]$

12. *Vypočítajte limitu $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x}\right)$. $[\infty]$

13. *Vypočítajte limitu $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}5x}{\operatorname{tg}6x}$. $\left[\frac{5}{6}\right]$

14. Vypočítajte limitu $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$. [Platí nerovnica:
$-1\le\sin x\le 1\Longrightarrow-\frac{1}{x}\le\frac{\sin x}{x}\le\frac{1}{x}$, pre $x>0$,
potom z vetyo nerovnostiach medzi limitami platí : $\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\sin x}{x}=$

15. Vypočítajte limitu $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos^3 x}{x^2}$. [1]

16. Zistite, či je funkcia $f(x)=5x^2+2x-6$ spojitá v bode $a=-3,\ 0,\ 1$. [Je spojitá]

17. *Zistite, či je funkcia $f(x)=|6x+3|$ spojitá v bode $a=-\frac{1}{2}$. [
$\lim_{x\longrightarrow-\frac{1}{2}^-}|6x+3|=\lim_{x-}$
$\lim_{x\longrightarrow-\frac{1}{2}^+}|6x+3|=\lim_{x-}$
$f\left(-\frac{1}{2}\right)=0\Longrightarrow\Longrightarrow\lim_{x\longrightarrow-\frac{1}{2}^-}|6x+3|=$

18. Zistite, či je funkcia $f(x)=\sqrt{3-x^2}$ zľava (sprava) spojitá v bode $a=\sqrt{3}$. [Funkcia $f(x)=\sqrt{3-x^2}$ má definičný obor $D(f)=\left\langle-\sqrt{3},\sqrt{3}\right\rangle$. Máme: $f\left(\sqrt{3}\right)=0$, $\lim_{x\longrightarrow\sqrt{3}^-}f(x)=\lim_{x\longrightarrow\sqrt{3}^-}\sqrt{3-x^2}=0$, teda f je v bode $\sqrt{3}$ spojitá zľava. Vzhľadom na definičný obor $\lim_{x\longrightarrow\sqrt{3}^+}f(x)$ nemá zmysel, teda f je zľava spojitá v bode $a=\sqrt{3}$.]

19. Zistite, či je funkcia $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ spojitá na intervale $(0,\infty)$. [Pre každé $a\in(0,\infty)$ máme $\lim_{x\longrightarrow a}f(x)=\lim_{x\longrightarrow a}\frac{\sin x}{x}=\frac{\sin a}{a}=f(a)$.Funkcia je spojitá na $(0,\infty)$.]

20. Zistite, či je funkcia $f(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{3-x}}$ spojitá na intervale $\langle 1,3)$, alebo na $(1,3\rangle$. [$f=\frac{h}{g}$, kde $h:\langle 1,\infty)\longrightarrow\mathbf{R}$, $h(x)=\sqrt{x-1}$, $g:(-\infty,3)\longrightarrow\mathbf{R}$, $g(x)=\sqrt{3-x}$,sú spojité, potom $f:\langle 1,3)\longrightarrow$, $f(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{3-x}}$je podiel dvoch spojitých funkcií, teda je spojitá, alebo to ukážeme takto: $\forall x\in\langle 1,3)$ platí: $\lim_{x\longrightarrow a}f(x)=\lim_{x\longrightarrow a}\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{3-x}}=\frac{\sqrt{a-1}}{\sqrt{3-a}}=f(a)$.]

21. Zistite, či je funkcia f spojitá v bode a a načrtnite jej graf ak:

$$f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x} & x\in\langle 0,1\rangle\\ 4-2x & x\in\left(1,\frac{5}{2}\right)\\ 2x-7 & x\in\left(\frac{5}{2},\infty\right)\end{cases},\ a=1,\ \frac{5}{2}.$$

[V bode $a=1$ je spojitá, v bode $a=\frac{5}{2}$ nie je definovaná, teda ani spojitá.]

22. Nájdite definičný obor funkcie $f(x)=\frac{(x-1)^2-1}{x-2}$. Ak sa dá nájdite také rozšírenie funkcie f, ktoré označíme F s definičným oborom $\mathbf{R}$, aby F bola spojitá! Napíšte predpis získanej spojitej funkcie F. [$D(f)=(-\infty,2)\cup(2,\infty)$.Funkcia f je spojitá. l
Hľadaná spojitá funkcia je daná predpisom

23. *Nájdite definičný obor funkcie $f(x) = \frac{x}{x-2}$. Ak sa dá nájdite také rozšírenie funkcie f, ktoré označíme F s definičným oborom $\mathbf{R}$, aby F bola spojitá! Napíšte predpis získanej spojitej funkcie F. [$D(f) = (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$ .Nedá sa rozšíriť aby bola spo

24. *Určte hodnotu parametra p tak, aby funkcia

$$f(x) = \begin{cases} 8e^{px} & x < 0 \\ p - 3x & x \geq 0 \end{cases},$$

bola v bode $a = 0$ spojitá. [$p = 8$]

25. *Určte hodnotu parametra p tak, aby funkcia

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x} - 1} & x \neq 0 \\ p^2 + 2p - 2 & x = 0 \end{cases},$$

bola v bode $a = 0$ spojitá. [$p = -3 \vee p = 1$]

26. Zistite, či je funkcia $f(x) = \frac{1}{x-3}$ spojitá a ohraničená na intervale $\langle 0, 3)$.[Nie je]

27. *Zistite, či je funkcia $f(x) = |4x - 8|$ spojitá na intervale $\langle -1, 4\rangle$. Ak áno, nájdite jej minimum a maximum na danom intervale.

$$\left[\begin{array}{c} f(x) = \begin{cases} 8 - 4x & \text{pre} \quad x \in \langle -1, 2) \\ 4x - 8 & \text{pre} \quad x \in \langle 2, 4\rangle \end{cases} \text{, spojitá,} \\ \min_{x \in \langle -1,4\rangle} f(x) = 0 = f(2), \max_{x \in \langle -1,4\rangle} f(x) = 12 = f(-1) . \end{array}\right]$$

28. Zistite, či je funkcia $f(x) = \sqrt{|x|}$ spojitá na intervale $\langle -3, 2\rangle$. Ak áno, pomocou grafu nájdite jej minimum a maximum na danom intervale.
[Je spojitá, $\min_{x \in \langle -3,2\rangle} f(x) = 0, \max_{x \in \langle -3,2\rangle} f(x) = \sqrt{3}$.]

11

Dňa 19.3.2007 tretia zápočtová písomka z M1.

12 Diferencovateľné funkcie. (vyriešte aspoň 5 príkladov do 26.3.2007 - kontrola a konzultácia)

1. *Vypočítajte derivácie funkcií:

$$f_1(x) = \sqrt{\sin\left(\frac{2x}{3}\right)},\ f_2(x) = 4^{3x},\ f_3(x) = \ln\frac{5+4x}{3+7x},\ f_4(x) = x10^{-x},\ f_5(x) = \ln\sin 2x.$$

$$\left[\begin{array}{c} f_1'(x) = \frac{\cos\left(\frac{2x}{3}\right)}{3\sqrt{\sin\left(\frac{2x}{3}\right)}},\ f_2'(x) = 3.\ln 4.4^{3x}, \\ f_3'(x) = -\frac{23}{(3+7x)(5+4x)},\ f_4'(x) = 10^{-x}(1 - x\ln 10),\ f_5'(x) = 2\operatorname{cotg} 2x. \end{array}\right]$$

2. Zistite, či je funkcia

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases},$$

diferencovateľná v bodoch $a = 0,\ \frac{2}{\pi}$.

[V bode $a = 0$ platí: $\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\longrightarrow 0}\sin\frac{1}{x}\nexists$.V bode $a = \frac{2}{\pi}$ nemusíme deriváciu počítať z definície, ale stačí pre $x \neq 0$ nájsť : $f'(x) = \sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x},\ f'\left(\frac{2}{\pi}\right) = 1.$]

3. *Zistite, či je funkcia

$$f(x) = \begin{cases} x\operatorname{arctg}\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases},$$

v bode $a = 0$ a) spojitá, b) diferencovateľná.

[a) je spojitá v bode $a = 0$, b) nie je diferencovateľná v bode $a = 0$.]

4. *Pre funkciu $f(x) = |2x - 6|$ nájdite f'. V bodoch, v ktorých derivácia neexistuje vypočítajte deriváciu sprava a deriváciu zľava. Načrtnite grafy f a f'.

$$\left[\begin{array}{c} f(x) = |2x-6| = \begin{cases} 6-2x & \text{pre} \quad x < 3 \\ 2x-6 & \text{pre} \quad x \geq 3 \end{cases}, \\ f'(x) = \begin{cases} -2 & \text{pre} \quad x < 3 \\ 2 & \text{pre} \quad x > 3 \end{cases},\quad \left.\begin{array}{l} f'_+(3) = \lim_{x\longrightarrow 3^+}\frac{2x-6}{x-3} = 2 \\ f'_-(3) = \lim_{x\longrightarrow 3^-}\frac{6-2x}{x-3} = -2 \end{array}\right\} \Longrightarrow f'(3)\nexists. \end{array}\right]$$

5. Pre funkciu $f(x) = \sqrt{|x-1|}$ nájdite f'. V bodoch, v ktorých derivácia neexistuje vypočítajte deriváciu sprava a deriváciu zľava. Načrtnite grafy f a f'.

$$\left[f'(x) = \begin{cases} \frac{-1}{2\sqrt{1-x}} & \text{pre} \quad x < 1 \\ \frac{1}{2\sqrt{x-1}} & \text{pre} \quad x > 1 \end{cases},\ f'(1)\nexists.\right]$$

6. Nájdite rovnicu dotyčnice a normály ku grafu funkcie $f(x) = e^{-x}\cos 2x$ v bode $A = (0, ?)$. [$A = (0,1)$, $t : x + y - 1 = 0$, $n : x - y + 1 = 0$]

7. *Nájdite rovnicu dotyčnice a normály ku grafu funkcie $f(x) = e^{1-x^2}$ v priesečníku s priamkou $y = 1$. [Úloha má dve riešenia: v bode $T_1 = (1,1): t_1 : 2x + y - 3 = 0$, $n_1 : x - 2y + 1 = 0$, v bode $T_2 = (-1,1): t_2 : 2x - y + 3 = 0$, $n_2 : x + 2y - 1 = 0$.]

8. *Ku grafu funkcie $f(x) = x \ln x$ nájdite rovnicu normály, ktorá je rovnobežná s priamkou $p : 2x - 2y + 3 = 0$. $\left[n : y - x + 3e^{-2} = 0\right]$

9. Nájdite uhol, pod ktorým sa pretínajú grafy funkcií $f(x) = \ln x$ a $g(x) = \ln^2 x$. [Návod: najskôr určte priesečník funkcií f a g, potom použite vzťah $tg\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|$, kde k_1, k_2 sú smernice dotyčníc ku grafom funkcie f resp. g v ich priesečníku. Výsledok: $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$, $\varphi_2 = \operatorname{arctg} \frac{e}{e^2+2}$.]

13 L' Hospitalovo pravidlo. (vyriešte aspoň 5 príkladov do 2.4.2007 - kontrola a konzultácia)

1. Vypočítajte limitu $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{\arcsin x - x}$.

   $\left[\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{\arcsin x - x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{-\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}(-2x)} = -1.\right]$

2. *Vypočítajte limitu $\lim_{x\to 0} \frac{e^{\operatorname{tg} x} - e^x}{\operatorname{tg} x - x}$. [1]
3. *Vypočítajte limitu $\lim_{x\to 0^+} (e^x - 1) \operatorname{cotg} x$. [1]
4. *Vypočítajte limitu $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{4}\right)$. $\left[-\frac{4}{\pi}\right]$
5. *Vypočítajte limitu $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$. [1]
6. *Vypočítajte limitu $\lim_{x\to a} \left[\frac{\sin x}{\sin a}\right]^{\operatorname{cotg}(x-a)}$. $\left[e^{\operatorname{cotg} a}\right]$

14

Dňa 2.4.2007 štvrtá zápočtová písomka z M1.

15 Zisťovanie priebehu funkcie. (vyriešte aspoň 5 príkladov do 16.4.2007 a ďalších aspoň 5 príkladov do 23.4.2007 - kontrola a konzultácia)

1. *Zistite priebeh funkcie $f(x) = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$ a načrtnite jej graf.

   [1) $D(f) = \mathbf{R}\setminus\{1\} = (-\infty, 1)\cup(1, \infty)$, $f(\frac{1}{2}) = 0$, spojitá, $\lim_{x\to 1} \frac{2x-1}{(x-1)^2} = \infty$, priamka $x = 1$ je vertikálna asymptota.

   2) Platí $-1 \in D(f) \Rightarrow 1 \notin D(f)$. Funkcia nie je ani párna, ani nepárna.

   3) Pretože má iba jeden nulový bod (viď 1)) nie je periodická.

   4) $f'(x) = -\frac{2x}{(x-1)^3}$, ak $x \in (-\infty, 0)$ $f'(x) < 0$ klesajúca, ak $x \in (0, 1)$ $f'(x) > 0$ rastúca, ak $x \in (1, \infty)$ $f'(x) < 0$ klesajúca.

   5) $f(0) = -1 = \operatorname{lokmin} f(x) = \min_{x\in D(f)} f(x)$.

   6) $f''(x) = \frac{4x+2}{(x-1)^4}$, ak $x \in (-\infty, -\frac{1}{2})$ $f''(x) < 0$ konkávna, ak $x \in (-\frac{1}{2}, 1)$ $f''(x) > 0$ konvexná, ak $x \in (1, \infty)$ $f''(x) > 0$ konvexná.

   7) V bode $x = -\frac{1}{2}$, $f(-\frac{1}{2}) = -\frac{8}{9}$ je inflexný bod.

   8) $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x-1}{(x-1)^2} = 0$. Priamka $y = 0$ je asymptota v bode ∞ aj $-\infty$. $H(f) = \langle -1, \infty)$.]

2. Zistite priebeh funkcie $f(x) = \arcsin \frac{1-x}{1+x}$ a načrtnite jej graf.

   [1) $D(f) = \langle 0, \infty)$, $f(1) = 0$, spojitá, nemá vertikálnu asymptotu.

   2) Platí $D(f) = \langle 0, \infty)$. Funkcia nie je ani párna, ani nepárna.

   3) Pretože má iba jeden nulový bod (viď 1)) nie je periodická.

   4) $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}$, ak $x \in (0, \infty)$ $f'(x) < 0$ klesajúca.

   5) $f(0) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2} = \max_{x\in D(f)} f(x)$.

   6) $f''(x) = \frac{3x+1}{2x\sqrt{x}(1+x)^2}$, ak $x \in (0, \infty)$ $f''(x) > 0$ konvexná.

   7) Nemá inflexný bod.

   8) $\lim_{x\to\infty} \arcsin \frac{1-x}{1+x} = -\frac{\pi}{2}$. Priamka $y = -\frac{\pi}{2}$ je asymptota v bode ∞. $H(f) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$.]

3. *Zistite priebeh funkcie $f(x) = x^2 - 2|x|$ a načrtnite jej graf.

   [1) $f(x) = x^2 + 2x$ pre $x \in (-\infty, 0)$ $x^2 - 2x$ $x \in \langle 0, \infty)$, $D(f) = \mathbf{R}$, $f(-2) = 0$, $f(0) = 0$, $f(2) = 0$, spojitá, nemá vertikálne asymptoty.

   2) Platí $x \in D(f) \Rightarrow -x \in D(f)$, teda definičný obor je symetrický podľa začiatku a $f(-x) = (-x)^2 - 2|-x| = x^2 - 2|x| = f(x)$. Funkcia je párna.

   3) Pretože má tri nulové body (viď 1)) nie je periodická. (Ak by bola periodická musela by mať nekonečne mnoho nulových bodov.)

4) $f'(x)=2x+2$ pre $x\in(-\infty,0)$ $2x-2$ $x\in\langle 0,\infty)$, $f'_+(0)=-2$, $f'_-(0)=2$, $f'(0)\nexists$, ak $x\in(-\infty,-1)$ $f'(x)<0$ klesajúca, ak $x\in(-1,0)$ $f'(x)>0$ rastúca, ak $x\in(0,1)$ $f'(x)<0$ klesajúca, ak $x\in(1,\infty)$ $f'(x)>0$ rastúca.

5) $f(0)=0=\text{lokmax}\, f(x)$, $\quad f(-1)=f(1)=-1=\min_{x\in D(f)} f(x)$.

6) $f''(x)=2$, ak $x\in(-\infty,0)$ $f''(x)>0$ konvexná, ak $x\in(0,\infty)$ $f''(x)>0$ konvexná.

7) Nemá inflexný bod.

8) $\lim_{x\to\pm\infty} x^2-2|x|=\infty$. Pre asymptotu v bode $-\infty$ máme: $k=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+2x}{x}=-\infty$, funkcia f nemá asymptotu v bode $-\infty$. Pre asymptotu v bode ∞ máme: $k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x}{x}=\infty$, funkcia f nemá asymptotu v bode ∞. $H(f)=\langle -1,\infty)$.]

4. *Zistite priebeh funkcie $f\left(x\right)=-1+\sqrt{-x^2-4x+5}$ a načrtnite jej graf.

[1) $D(f)=\langle -5,1\rangle$, $f(-2-2\sqrt{2})=0$, $f(-2+2\sqrt{2})=0$ spojitá (zložená funkcia), nemá vertikálnu asymptotu.

2) Platí $D(f)=\langle -5,1\rangle$. Funkcia nie je ani párna, ani nepárna.

3) Nie je periodická.

4) $f'(x)=\frac{-x-2}{\sqrt{-x^2-4x+5}}$ existuje na $(-5,1)$, ak $x\in(-5,-2)$ $f'(x)>0$ rastúca, ak $x\in(-2,1)$ $f'(x)<0$ klesajúca.

5) $f(-2)=-1+\sqrt{9}=2=\max_{x\in D(f)} f(x)$.

6) $f''(x)=\frac{-9}{(\sqrt{-x^2-4x+5})^3}$ existuje na $(-5,1)$, ak $x\in(-5,1)$ $f''(x)<0$ konkávna.

7) Nemá inflexný bod.

8) $f(-5)=-1$, $f(1)=-1$. Pretože $D(f)$ neobsahuje body $\pm\infty$, nemá zmysel skúmať asymptoty v týchto bodoch. $H(f)=\langle -1,2\rangle$.]

5. Zistite priebeh funkcie $f\left(x\right)=\frac{1+\ln x}{x}$ a načrtnite jej graf.

[1) $D(f)=(0,\infty)$, $f(\frac{1}{e})=0$, spojitá (podiel dvoch spojitých).

2) Platí $D(f)=(0,\infty)$. Funkcia nie je ani párna, ani nepárna.

3) Pretože má iba jeden nulový bod (viď 1)) nie je periodická.

4) $f'(x)=-\frac{\ln x}{x^2}$, ak $x\in(0,1)$ $f'(x)>0$ rastúca, ak $x\in(1,\infty)$ $f'(x)<0$ klesajúca.

5) $f(1)=1=\max_{x\in D(f)} f(x)$.

6) $f''(x)=\frac{2\ln x-1}{x^3}$, ak $x\in(0,e^{\frac{1}{2}})$ $f''(x)<0$ konkávna, ak $x\in(e^{\frac{1}{2}},\infty)$ $f''(x)>0$ konvexná.

7) V bode $x=e^{\frac{1}{2}}$, $f(e^{\frac{1}{2}})=\frac{3}{2}e^{-\frac{1}{2}}$ je inflexný bod.

8) $\lim_{x\to 0^+}\frac{1+\ln x}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\ln x+1=-\infty$. Priamka $x=0$ je vertikálna asymptota funkcie. $\lim_{x\to\infty}\frac{1+\ln x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0$. Priamka $y=0$je asymptota v bode ∞. $H(f)=(-\infty,1\rangle$.]

6. Zistite priebeh funkcie $f(x) = \ln \frac{x+1}{x-1}$ a načrtnite jej graf. [viď ma-online]
7. *Zistite priebeh funkcie $f(x) = (1-3x)\, e^{2x}$ a načrtnite jej graf. [viď ma-online]
8. *Zistite priebeh funkcie $f(x) = \frac{\ln^2 x}{x}$ a načrtnite jej graf. [viď ma-online]
9. *Zistite priebeh funkcie $f(x) = x \operatorname{arctg} x$ a načrtnite jej graf. [viď ma-online]
10. Zistite priebeh funkcie $f(x) = \frac{x^2-6x+3}{x-3}$ a načrtnite jej graf. [viď ma-online]
11. Zistite priebeh funkcie $f(x) = \ln\left(4-x^2\right)$ a načrtnite jej graf. [viď ma-online]
12. Zistite priebeh funkcie $f(x) = \cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ a načrtnite jej graf. [viď ma-online]
13. *Zistite priebeh funkcie $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ a načrtnite jej graf. [viď ma-online]
14. Zistite priebeh funkcie $f(x) = \sinh x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$ a načrtnite jej graf. [viď ma-online]
15. Zistite priebeh funkcie $f(x) = \ln \cos x$ a načrtnite jej graf. [viď ma-online]

16 Dňa 30.4.2007 skúška z M1.