1. (a) Nájdite definičný obor funkcie $h(x) = \sqrt{\frac{x}{x+2}}$.

   (b) Ukážte, že funkcia $g(x) = \frac{2}{x+2}$ je klesajúca na intervale $A = (-\infty, -2)$.

   (c) Nájdite horné a dolné ohraničenie funkcie g na intervale A.

   (d) Ukážte, že
$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0, \ \lim_{x\to-2} g(x) = -\infty,$$
   kde funkcia g ako v predchádzajúcom je definovaná na A.

   (e) Ukážte, že funkcia g je spojitá na A.

   (f) Nájdite inverznú funkciu k funkcii $f : (-\infty, -2) \to (-\infty, -1)$; $f(x) = \dfrac{|x|}{2-|x|}$.

   (g) Nájdite všeobecný predpis funkcie $F^n(x) = (\underbrace{F \circ F \circ \ldots \circ F}_{\text{n-krát}})(x)$ (čiže funkcia F zložená n-krát sama so sebou), kde $F(x) = \dfrac{x}{2+x}$.

Riešenie:

(a) Označme definičný obor funkcie h ako $D(h)$, potom pre $x \in D(h)$ musí platiť:
$$x \neq -2 \quad \text{a súčasne} \quad \tfrac{x}{x+2} \geq 0.$$
Pre $x \neq -2$ bude $\frac{x}{x+2} \geq 0$ práve vtedy, keď:
$$x \geq 0 \quad \text{a súčasne} \quad x+2 > 0 \tag{1}$$
$$\text{alebo}$$
$$x \leq 0 \quad \text{a súčasne} \quad x+2 < 0. \tag{2}$$
Z podmienky (1) dostávame $x \geq 0$ a z podmienky (2) máme $x < -2$. Z toho vyplýva, že $D(h) = (-\infty, -2) \cup \langle 0, \infty)$.

(b) Funkcia g je klesajúca na A práve vtedy, keď pre každé $x_1, x_2 \in A$ platí: ak $x_1 < x_2$, potom $g(x_1) > g(x_2)$.

Nech $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ sú ľubovoľné také, že $x_1 < x_2 < -2$, potom:
$$\begin{array}{rcl}
x_1 & < & x_2 \ (< -2) \\
x_1 + 2 & < & x_2 + 2 \ (< 0) \\
\dfrac{x_1+2}{x_2+2} & > & 1 \\
\dfrac{1}{x_2+2} & < & \dfrac{1}{x_1+2} \\
\dfrac{2}{x_2+2} & < & \dfrac{2}{x_1+2} \\
g(x_2) & < & g(x_1)
\end{array}$$
Čiže funkcia g je klesajúca na A.

(c) Horné ohraničenie funkcie g na A je také konečné reálne číslo M, že pre každé $x \in A$ platí: $g(x) \leq M$ a dolné ohraničenie funkcie g na A je také konečné reálne číslo m, že pre každé $x \in A$ platí: $g(x) \geq m$.

Pretože g je definovaná na $A = (-\infty, -2)$, tak pre každé $x \in A$ bude $x + 2 < 0$ a teda $g(x) = \frac{2}{x+2} < 0$ pre každé $x \in A$. Našli sme horné ohraničenie pre funkciu g na A. Dokonca $M = 0$ je najmenšie z horných ohraničení (supremum) funkcie g, čo vieme ľahko dokázať. Neexistuje totiž menšie $M_0 < M = 0$ také, že pre každé

$x \in A$ je $g(x) \leq M_0$. Nech by existovalo. Vezmime $x_0 < \frac{2}{M_0} - 2$ a vypočítajme $g(x_0)$. Pretože $M_0 < 0$, tak $x_0 < -2$ a teda $x_0 \in A$. Ďalej:

$$\begin{aligned} x_0 &< \frac{2}{M_0} - 2 \\ x_0 + 2 &< \frac{2}{M_0} \\ 1 &> \frac{2}{M_0(x_0+2)} \\ M_0 &< \frac{2}{x_0+2} = g(x_0), \end{aligned}$$

čo je spor s predpokladom, že pre každé $x \in A$ je $g(x) \leq M_0$. Teda pre akékoľvek $M_0 < 0$ ľubovoľne blízke nule vieme zvoliť $x_0 \in A$ dostatočne malé číslo tak, aby $g(x_0) > M_0$.

Dolné ohraničenie funkcia g na A nemá. Ukážeme opäť sporom. Nech by existovalo také konečné reálne číslo m_0, že pre každé $x \in A$ platí: $m_0 \leq g(x)$. Potom určite $m_0 < M = 0$, pretože $M = 0$ je najmešie z horných ohraničení funkcie g na A a g nie je konštantná funkcia. Vezmime x_0 také, že $x_0 > \frac{2}{m_0} - 2$. Potom $x_0 \in A$. Úpravami dostaneme:

$$\begin{aligned} x_0 &> \frac{2}{m_0} - 2 \\ x_0 + 2 &> \frac{2}{m_0} \\ 1 &< \frac{2}{m_0(x_0+2)} \\ m_0 &> \frac{2}{x_0+2} = g(x_0), \end{aligned}$$

čo je spor s predpokladom, že pre každé $x \in A$ platí: $m_0 \leq g(x)$. Teda pre akékoľvek malé $m_0 < 0$ vieme zvoliť $x_0 \in A$ dostatočne blízke číslu -2 tak, aby $g(x_0) < m_0$.

(d) Ukázať, že $\lim_{x \to -\infty} g(x) = 0$, znamená ukázať, že pre každé reálne číslo $\varepsilon > 0$ existuje reálne číslo $\delta > 0$ také, že pre všetky $x \in A$ platí: ak $x < \frac{-1}{\delta}$, potom $|g(x) - 0| < \varepsilon$. Pretože $x \in A$, tak hľadané reálne číslo δ musí byť menšie alebo rovné $\frac{1}{2}$. Z toho totiž dostaneme:

$$\begin{aligned} 0 < \delta &\leq \frac{1}{2} \\ 2 &\leq \frac{1}{\delta} \\ -2 &\geq \frac{-1}{\delta} \end{aligned}$$

To znamená, že pre každé $x < \frac{-1}{\delta}$ bude $x < -2$. V časti (c) príkladu sme ukázali, že 0 je najmenšie z horných ohraničení, pričom dôkaz vychádzal argumentačne z toho, že čím menšie $x_0 \in A$ bolo, tým bližšie bola funkčná hodnota $g(x_0)$ k 0. Vezmime teda $M < 0$ a definujme: $\delta = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{M-1}\right)$ a $\varepsilon = -M \left(= \frac{\delta}{\frac{1}{2} - \delta}\right)$. Potom čím bližšie je M k 0, tým menší (v absolútnej hodnote väčší) je podiel $\frac{-1}{\delta}$ a teda tým menšie je $x \in A$ spĺňajúce podmienku $x < \frac{-1}{\delta}$ a zároveň je tým bližšie funkčná hodnota v tomto x k 0. Máme:

$$\begin{aligned} x &< \frac{-1}{\delta} = \frac{-2}{1+\frac{1}{M-1}} = \frac{-2(M-1)}{M} = \frac{2}{M} - 2 \\ x+2 &< \frac{2}{M} < 0 \\ M &< \frac{2}{x+2} \\ -M &> \frac{-2}{x+2} = -g(x) > 0 \\ |g(x)| = -g(x) &< -M = \varepsilon \end{aligned}$$

Teda pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(\varepsilon+1)}$ také, že pre všetky $x \in A$ platí: ak $x < \frac{-1}{\delta}$, potom $|g(x)| < \varepsilon$.

Ak chceme ukázať, že $\lim_{x\to -2} g(x) = -\infty$, musíme ukázať, že pre každé reálne číslo $\varepsilon > 0$ existuje reálne číslo $\delta > 0$ také, že pre všetky $x \in A$ platí: ak $|x+2| < \delta$, potom $g(x) < \frac{-1}{\varepsilon}$. Tvrdenie vyplýva z toho, že funkcia g nie je na A ohraničená zdola (pričom čím bližšie testované $x_0 < -2$ bolo číslu -2, tým menšia bola funkčná hodnota v tomto x_0), ako bolo ukázané v časti (c) príkladu. Formálne: nech pre $\varepsilon > 0$ ľubovoľné je $\delta = 2\varepsilon$, potom pre všetky $x \in A$ platí, že ak $|x+2| < \delta$, potom:

$$\begin{aligned} |x+2| = -x-2 &< \delta = 2\varepsilon \\ x+2 &> -2\varepsilon \\ \frac{1}{\varepsilon} &< \frac{-2}{x+2} \\ \frac{-1}{\varepsilon} &> \frac{2}{x+2} = g(x). \end{aligned}$$

(e) Označme $g_1 : A \to \mathbb{R}$; $g_1(x) = 2$ a $g_2 : A \to \mathbb{R}$; $g_2(x) = x+2$. Potom $g : A \to \mathbb{R}$ je dobre definovaná na A ako $g(x) = \frac{g_1(x)}{g_2(x)}$ ($g_2(x) \neq 0$ pre všetky $x \in A$). Keďže funkcie g_1 aj g_2 sú spojité na A a g je ich podiel, tak aj g je funkcia spojitá na A.

(f) Funkcia f je definovaná na $A = (-\infty, -2)$, teda pre každé $x \in A$ platí: $|x| = -x$ a predpis funkcie f vieme upraviť nasledujúcim spôsobom:

$$f(x) = \frac{|x|}{2-|x|} = \frac{-x}{2-(-x)} = (-1)\frac{x}{x+2} = (-1)\frac{x+2-2}{x+2} = -1 + \frac{2}{x+2} \tag{3}$$

Označme $B = (-\infty, -1)$. Potom koobor funkcie f je B. Z časti (c) príkladu vieme, že funkcia $\frac{2}{x+2}$ je na A ohraničená zhora a platí: $\frac{2}{x+2} < 0$ pre každé $x \in A$. Z toho a z (3) pre každé $x \in A$ vyplýva:

$$f(x) = -1 + \frac{2}{x+2} < -1.$$

Súčasne pre každé $x \in A$ je $f(x) > -\infty$, keďže funkcia $\frac{2}{x+2}$ nemá dolné ohraničenie na A (opäť časť (c) príkladu). Funkcia f dosahuje všetky hodnoty z intervalu $(-\infty, -1)$, pretože $f(x) = -1 + g(x)$ a funkcia g je spojitá na A (dôkaz v časti (e) príkladu), a teda obor funkčných hodnôt bude mať $H(f) = (-\infty, -1) = B$. Ukázali sme, že funkcia f je surjektívna na svojom definičnom obore.

Teraz ukážeme, že funkcia f je aj injektívna na svojom definičnom obore, tj. že pre každú dvojicu bodov $x_1, x_2 \in A$ platí: ak $x_1 \neq x_2$, tak $f(x_1) \neq f(x_2)$. Obmenou tohto tvrdenia je, že pre každú dvojicu bodov $x_1, x_2 \in A$ platí: ak $f(x_1) = f(x_2)$, tak $x_1 = x_2$. Ak ale $f(x_1) = f(x_2)$, tak z (3) máme:

$$\begin{aligned}
-1 + \frac{2}{x_1+2} &= -1 + \frac{2}{x_2+2} \\
\frac{2}{x_1+2} &= \frac{2}{x_2+2} \\
\frac{1}{x_1+2} &= \frac{1}{x_2+2} \\
x_2 + 2 &= x_1 + 2 \\
x_2 &= x_1.
\end{aligned}$$

Čiže funkcia f je injektívna na A. (Uvedené vyplýva už z časti (b) príkladu, v ktorej sme ukázali, že funkcia $\frac{2}{x+2}$ je klesajúca na A a teda taká je aj funkcia f, keďže $f(x) = -1 + \frac{2}{x+2}$. Z toho priamo vyplýva aj injektívnosť funkcie f.)

Funkcia f je teda injektívna aj surjektívna a teda je bijektívna. Čiže k nej existuje inverzná funkcia $f^{-1} : (-\infty, -1) \to (-\infty, -2)$. Nájdime ešte jej predpis:

$$\begin{aligned}
y = f(x) &= -1 + \frac{2}{x+2} \\
y + 1 &= \frac{2}{x+2} \\
x + 2 &= \frac{2}{y+1} \\
x &= -2 + \frac{2}{y+1} \\
x &= \frac{-2y}{y+1}.
\end{aligned}$$

Máme teda $f^{-1}(x) = \frac{-2x}{x+1}$.

(g) Napíšme niekoľko prvých iterácii, aby sme mohli vysloviť hypotézu o predpise funkcie F^n.

$$\begin{aligned}
F(x) &= \frac{x}{2+x} \\
F^2(x) = F(F(x)) &= \frac{F(x)}{2+F(x)} = \frac{\frac{x}{2+x}}{2+\frac{x}{2+x}} = \frac{x}{4+3x} \\
F^3(x) = F(F^2(x)) &= \frac{F^2(x)}{2+F^2(x)} = \frac{\frac{x}{4+3x}}{2+\frac{x}{4+3x}} = \frac{x}{8+7x} \\
F^4(x) = F(F^3(x)) &= \frac{F^3(x)}{2+F^3(x)} = \frac{\frac{x}{8+7x}}{2+\frac{x}{8+7x}} = \frac{x}{16+15x}
\end{aligned}$$

Zrejme $F^n(x) = \frac{x}{2^n+(2^n-1)x}$. Dokážeme matematickou indukciou. Pre $n = 1$ máme $F(x) = \frac{x}{2^1+(2^1-1)x} = \frac{x}{2+x}$. Nech pre $n = k-1$, kde $k \geq 2$ máme $F^{k-1}(x) = \frac{x}{2^{k-1}+(2^{k-1}-1)x}$, ukážeme, že pre $n = k$ platí $F^k(x) = \frac{x}{2^k+(2^k-1)x}$.

$$F^k(x) = F(F^{k-1}(x)) = \frac{F^{k-1}(x)}{2+F^{k-1}(x)} = \frac{\frac{x}{2^{k-1}+(2^{k-1}-1)x}}{2+\frac{x}{2^{k-1}+(2^{k-1}-1)x}} = \frac{x}{2^k+(2^k-1)x}.$$

2. (a) Určte definičný obor funkcie $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$.
   (b) Nech $g : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$; $g(x) = x+2$. Ukážte, že $h = f - g$ definovaná na $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ je konštantná nulová funkcia.
   (c) Ukážte, že
$$\lim_{x\to 2} f(x) = 4.$$
   (d) Nech $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $F(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & \text{pre } x \neq 2 \\ 4 & \text{pre } x = 2 \end{cases}$. Ukážte, že F je spojitá na celom $\mathbb{R}$.

Riešenie:

(a) Pretože nie je možné deliť nulou, musí byť $x \neq 2$ a teda $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

(b) Keďže $h = f - g$ a funkcie f aj g majú rovnaký definičný obor $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, tak funkcia h je dobre definovaná a pre každé $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ platí:

$$h(x) = f(x) - g(x) = \frac{x^2-4}{x-2} - (x+2) = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} - (x+2) = (x+2) - (x+2) = 0.$$

(c) Číslo 2 je hromadným bodom $D(f)$, hoci nepatrí $D(f)$. Aby $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$, musí pre každé reálne číslo $\varepsilon > 0$ existovať reálne číslo $\delta > 0$ také, že pre všetky $x \in D(f)$ platí: ak $|x-2| < \delta$, potom $|f(x) - 4| < \varepsilon$. Nech $\varepsilon > 0$ je ľubovoľné reálne číslo a $\delta = \varepsilon$, potom pre $|x-2| < \delta$ máme:

$$|f(x) - 4| = \left| \frac{x^2-4}{x-2} - 4 \right| = |(x+2) - 4| = |x-2| < \delta = \varepsilon$$

(d) Funkcia F je spojitou funkciou na celom $\mathbb{R}$ okrem bodu 2, pretože je podielom dvoch spojitých funkcií $x^2 - 4$ a $x + 2$. To, že je F spojitá aj v bode 2, vyplýva z toho, že $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$ (časť (c) príkladu). Konkrétne:

$$\lim_{x\to 2} F(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4 = F(2).$$

3. (a) Určte definičný obor funkcie $f(x) = \frac{1}{4-x}$.
   (b) Vyšetrite párnosť, nepárnosť funkcie f.
   (c) Ukážte, že funkcia f je rastúca na intervale $(-\infty, 4)$ aj na intervale $(4, \infty)$, ale nie je rastúca na $(-\infty, 4) \cup (4, \infty)$.
   (d) Ukážte, že
$$\begin{aligned} \lim_{x\to 4+} f(x) &= -\infty, \\ \lim_{x\to 4-} f(x) &= \infty. \end{aligned}$$
   (e) Nájdite inverznú funkciu f^{-1} k funkcii f.

Riešenie:

(a) Pretože nie je možné deliť nulou, musí byť $x \neq 4$ a teda $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{4\} = (-\infty, 4) \cup (4, \infty)$.

(b) Funkcia f nie je párna, ani nepárna, pretože jej definičný obor nie je súmerný podľa počiatku, tj. neplatí, že pre každé $x \in D(f)$ je aj $-x \in D(f)$. Hoci číslo -4 patrí $D(f)$, číslo 4 neleží v $D(f)$.

(c) Ukážeme, že funkcia f je rastúca na intervale $(-\infty, 4)$, tj. že pre každú dvojicu bodov $x_1, x_2 \in (-\infty, 4)$ platí: ak $x_1 < x_2$, potom $f(x_1) < f(x_2)$. Upravujme:

$$\begin{aligned} x_1 &< x_2 < 4 \\ 4 - x_1 &> 4 - x_2 > 0 \\ \frac{1}{4 - x_2} &> \frac{1}{4 - x_1} > 0 \\ f(x_1) &< f(x_2) \end{aligned}$$

Teraz ukážeme, že funkcia f je rastúca aj na intervale $(4, \infty)$, tj. že pre každú dvojicu bodov $x_1, x_2 \in (4, \infty)$ platí: ak $x_1 < x_2$, potom $f(x_1) < f(x_2)$. Upravujme:

$$\begin{aligned} 4 < x_1 &< x_2 \\ 0 > 4 - x_1 &> 4 - x_2 \\ 0 > \frac{1}{4 - x_2} &> \frac{1}{4 - x_1} \\ f(x_1) &< f(x_2) \end{aligned}$$

Napokon ukážeme, že funkcia f nie je rastúca na intervale $(-\infty, 4) \cup (4, \infty)$, tj. na svojom definičnom obore. Inak by totiž muselo byť splnené, že pre každú dvojicu bodov $x_1, x_2 \in D(f)$ platí: ak $x_1 < x_2$, potom $f(x_1) < f(x_2)$. Vezmime také $x_1, x_2 \in D(f)$, že $x_1 < 4 < x_2$. Potom:

$$\begin{aligned} x_1 &< 4 < x_2 \\ 4 - x_1 &> 0 > 4 - x_2 \\ \frac{1}{4 - x_2} &< 0 < \frac{1}{4 - x_1} \\ f(x_2) &< 0 < f(x_1) \end{aligned}$$

Našli sme dvojicu bodov z $D(f)$, pre ktorú to splnené nie je a teda funkcia f nie je rastúca na svojom definičnom obore.

(d) Ukázať, že $\lim_{x \to 4+} f(x) = -\infty$, znamená ukázať, že pre každé reálne číslo $\varepsilon > 0$ existuje reálne číslo $\delta > 0$ také, že pre všetky $x > 4$ platí: ak $x - 4 < \delta$, potom $f(x) < \frac{-1}{\varepsilon}$. Nech $\varepsilon > 0$ je ľubovoľné a $\delta = \varepsilon$, potom pre $x - 4 < \delta$ máme:

$$\begin{aligned} 0 < x - 4 &< \delta \\ -\delta &< 4 - x < 0 \\ \frac{1}{4 - x} &< \frac{-1}{\delta} \\ f(x) &< \frac{-1}{\delta} = \frac{-1}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Ukázať, že $\lim_{x \to 4-} f(x) = \infty$, znamená ukázať, že pre každé reálne číslo $\varepsilon > 0$ existuje reálne číslo $\delta > 0$ také, že pre všetky $x < 4$ platí: ak $4 - x < \delta$, potom $f(x) > \frac{1}{\varepsilon}$. Nech $\varepsilon > 0$ je ľubovoľné a $\delta = \varepsilon$, potom pre $4 - x < \delta$ máme:

$$\begin{aligned} 0 < 4 - x &< \delta \\ \frac{1}{\delta} &< \frac{1}{4 - x} \\ f(x) &> \frac{1}{\delta} = \frac{1}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

(e) Hoci funkcia f nie je rastúca na celom svojom definičnom obore $D(f) = (-\infty, 4) \cup (4, \infty)$, je injektívna, pretože ak $f(x_1) = f(x_2)$, tak $x_1 = x_2$. Ukážeme:

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(x_2) \\ \frac{1}{4 - x_1} &= \frac{1}{4 - x_2} \\ 4 - x_2 &= 4 - x_1 \\ x_1 &= x_2. \end{aligned}$$

Funkcia f je aj surjektívna, pretože pre každé $y \in H(f)$ existuje $x \in D(f)$ také, že $y = f(x)$. Pre $y \neq 0$ máme:

$$\begin{aligned} y &= f(x) \\ y &= \frac{1}{4 - x} \\ 4 - x &= \frac{1}{y} \\ x &= 4 - \frac{1}{y}, \end{aligned}$$

kde x je ľubovoľné, také, že $x \neq 4$. Teda k funkcii f existuje inverzná funkcia $f^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{4\}$; $f^{-1}(x) = 4 - \frac{1}{x}$.

4. (a) Určte definičný obor funkcie $f(x) = \frac{\sin x}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$.
   (b) Vyšetrite párnosť, nepárnosť funkcie f.
   (c) Zistite, či je funkcia f periodická. Ak áno, nájdite najmenšiu periódu funkcie f.

Riešenie:

(a) Aby nebolo možné deliť nulou, musí pre všetky x z definičného oboru funkcie f platiť $\sin\left(\frac{x}{2}\right) \neq 0$. $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = 0$ práve vtedy, keď $\frac{x}{2} = k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$. Čiže $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{2k\pi; k \in \mathbb{Z}\} = \cup_{k\in\mathbb{Z}}(2k\pi, 2(k+1)\pi)$.

(b) Definičný obor funkcie f je súmerný podľa počiatku. Upravme predpis funkcie:

$$f(x) = \frac{\sin x}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\sin\left(2\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

Vyšetrime $f(-x)$:

$$f(-x) = 2\cos\left(\frac{-x}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{x}{2}\right) = f(x),$$

kde sme využili, že kosínus je párna funkcia. Teda pre každé $x \in D(f)$ platí: $f(-x) = f(x)$, čiže funkcia f je párna. Nie je nepárna, pretože existuje aspoň jedno $x \in D(f)$ také, že $f(-x) \neq -f(x)$, napríklad: $x = \frac{\pi}{2}$.

(c) Funkcia f je periodická, pretože funkcia $\cos\left(\frac{x}{2}\right)$ definovaná na $D(f)$ je periodická a $f(x) = 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)$. Keďže perióda funkcie $\cos\left(\frac{x}{2}\right)$ je 4π, tak funkcia f má najmenšiu periódu práve 4π.