Domáca úloha cvičenie 11 - riešenie

DÚ: Ukážte, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\left(\frac{3}{4}+n\right)\pi\right)\sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

je rad so striedavým znamienkom. Použite Leibnizovo kritérium konvergencie, aby ste ukázali, že rad je konvergentný.

Riešenie:

Platí:

$$\cos\left(\left(\frac{3}{4}+n\right)\pi\right) = \cos\left(\frac{3}{4}\pi + n\pi\right) = \cos\left(\frac{3}{4}\pi\right)\cos(n\pi) - \sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)\sin(n\pi)$$
$$= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(-1)^n - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)0 = (-1)^{n+1}\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Teda máme:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\left(\frac{3}{4}+n\right)\pi\right)\sin\left(\frac{1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

Označme $a_n = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{1}{n}\right)$, potom pre každé $n \in \mathbb{N}$ platí: $0 < \frac{1}{n} \leq 1$, z čoho vyplýva, že $a_n > 0$ pre každé $n \in \mathbb{N}$. Skutočne ide o rad so striedavým znamienkom.

Vypočítajme limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\lim_{n\to\infty}\sin\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 0 = \frac{\sqrt{2}}{2}0 = 0.$$

Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí**:**

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$$

Keďže $\sin x$ je na intervale $\langle 0,1\rangle$ rastúca, tak pre všetky $n \in \mathbb{N}$ máme:

$$\sin\left(\frac{1}{n+1}\right) < \sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

Z toho dostávame:

$$a_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{1}{n+1}\right) < \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{1}{n}\right) = a_n.$$

To znamená, že postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je klesajúca.

Obe podmienky Leibnizovho kritéria konvergencie radov so striedavým znamienkom sú splnené a preto je rad $\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(\left(\frac{3}{4}+n\right)\pi\right)\sin\left(\frac{1}{n}\right)$ konvergentný.