

TÝŽDEŇ 1

1. Riešte kvadratické rovnice

a. $3x^2 + x - 2 = 0$ $[-1; \frac{2}{3}]$

b. $2x^2 - 2x + 1 = 0$ $[\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i]$

c. $2x^2 - 2x + 5 = 0$ $[\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}i]$

2. V obore komplexných čísel riešte rovnice

a. $2z + 3iz - 1 + 2i = -2 + i$, b) $\frac{1+i}{2z+iz-i} = \frac{1}{z+1-i}$, c) $\frac{1}{z+i} - \frac{1+i}{z} = 1$
 (a) $[z = -\frac{5}{13} + i\frac{1}{13}]$, b) $[z = 2 + i]$, c) $[z_{1,2} = -i \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(-1 + i)]$

3. Vypočítajte čísla $(\frac{1+i}{1-i})^{2015}$, $[-i]$; $\frac{(1-i)(1-2i)}{3+4i}$, $[-\frac{3}{5} - \frac{1}{5}i]$
 a znázornite ich v komplexnej rovine.

4. Riešte binomické rovnice, riešenie znázornite v komplexnej rovine.

a) $z^2 = i$, $[z_k = e^{i(\frac{\pi}{4} + k\pi)}$, $k = 0, 1]$; b) $z^4 = -4$, $[z_k = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2})}$, $k = 0, 1, 2, 3]$

c) $z^4 = -2 + 2\sqrt{3}i$, $[z_k = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2})}$, $k = 0, 1, 2, 3]$;

d) $z^3 = -i$ $[z_k = e^{i(\frac{\pi}{2} + k\frac{2\pi}{3})}$, $k = 0, 1, 2]$.

5. Nájdite reálne čísla x, y , ktoré spĺňajú rovnice:

a. $x(2 + 3i) + y(4 - 5i) = 6 - 2i$ $[(x, y) = (1, 1)]$

b. $(x - i)(2 - yi) = 11 - 23i$ $[(x_1, y_1) = (7, 3); (x_2, y_2) = (-3/2, -14)]$

c. $\frac{x}{2+3i} + \frac{y}{3+2i} = 1$ $[(x, y) = (-26/5, 39/5)]$

TÝŽDEŇ 2

1. Napíšte množinu všetkých riešení sústavy rovníc s komplexnými neznámymi

a) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = -1 \\ 3x_1 + 4x_2 = 7 \end{cases}$ $[(1, 1)]$

b) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = i \\ 3x_1 + 4x_2 = -7i \end{cases}$ $[(-i, -i)]$

c) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 = 1 \end{cases}$ $[\emptyset]$

2. Rozhodnite, či sú dané matice stupňovité, prípadne redukované stupňovité

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Napíšte množinu P všetkých riešení sústavy, ktorej rozšírená matica je

a) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right)$, b) $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$

4. Riešte sústavu lineárnych rovníc, ktorých rozšírená matica je

$$\begin{array}{ll}
 \text{a)} & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 5 \end{array} \right) & P = \emptyset \\
 \text{b)} & \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 3 & 1 & 1 \\ 7 & 3 & 2 & 1 \\ 8 & -3 & 13 & -8 \end{array} \right) & P = \emptyset \\
 \text{c)} & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & -5 & 2 \\ 3 & 4 & -5 & 5 \end{array} \right) & P = \{(7, -4, 0)\} \\
 \text{d)} & \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 7 & 1 \end{array} \right) & P = \{(-3a, 1 + 5a, a), a \in R\} \\
 \text{e)} & \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 18 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -2 & -1 \end{array} \right) & P = \{(9, a - 14, a, 0), a \in R\} \\
 \text{f)} & \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 4 & -3 \\ 2 & -1 & -1 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & 3 & 9 \end{array} \right) & P = \{(3 + a - 2b, 3 + a + b, a, b), a, b \in R\}.
 \end{array}$$

5. a) Riešte sústavu rovníc

$$\begin{array}{l}
 x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \\
 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -1 \\
 x_2 - x_3 = 3
 \end{array} \quad P = \{(a - 5, a + 3, a), a \in R\}$$

b) Sú $\bar{u} = (-1, 7, 4)$, $\bar{v} = (5, 3, 0)$ riešeniami predchádzajúcej sústavy rovníc?

6. a) Riešte sústavu rovníc

$$\begin{array}{l}
 x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3 \\
 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -1 \\
 x_2 - 2x_3 = 5
 \end{array} \quad P = \{(7 + a, 5 + 2a, a), a \in R\}$$

b) Napíšte hodnotu matice a rozšírenej matice predchádzajúcej sústavy.

TÝŽDEŇ 3

1. Zistite, či je množina $M \subset R^3$ lineárne závislá alebo nezávislá.

a. $M = \{(2, 1, -1); (4, 2, -1)\}$ [LNZ]

b. $M = \{(2, 1, -1); (4, 2, -1); (-2, -1, 0)\}$ [LZ]

2. Zistite, či je množina $M \subset R^4$ lineárne závislá alebo nezávislá.

a. $M = \{(2, 0, 1, -1); (0, 4, 2, -1); (1, 1, 1, 1)\}$ [LNZ]

b. $M = \{(2, 0, 1, -1); (0, 4, 2, -1); (1, 1, 1, 1); (1, 0, 1, 0)\}$ [LNZ]

3. Zistite, či sú riadky matice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ lineárne nezávislé a určte hodnotu $h(A)$. [$h(A) = 4$, LNZ]

4. Vypočítajte determinanty

a. $\begin{vmatrix} 1+i & 2 \\ i & 1-i \end{vmatrix} [2-2i]$, b. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 12 & 0 & 12 \end{vmatrix} [0]$, c. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 12 \end{vmatrix} [-24]$,

d. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} [-4]$, e. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} [-6]$

5. Pomocou determinantov vypočítajte maticu inverznú k matici

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 7 & -6 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \quad \left[A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 & 16 & 2 \\ 6 & 18 & 0 \\ 4 & 13 & -1 \end{pmatrix} \right]$$

6. Pomocou Cramerovho pravidla riešte sústavu

$$\begin{aligned} & -3x_1 + 7x_2 - 6x_3 = 2 \\ \text{a. } & \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1 \end{cases} \quad P = \left\{ \left(\frac{5}{3}, 2, \frac{7}{6} \right) \right\} \quad \text{b. } \begin{cases} (1+i)x_1 + 2x_2 = 0 \\ ix_1 + (1-i)x_2 = i \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \\ x_2 = -\frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

TÝŽDEŇ 4

1. Nájdite všetky korene polynómu $f(x)$ a napíšte jeho rozklad na súčin ireducibilných polynómov nad R aj nad C .

a. $f(x) = x^3 - x - 6$ $\left[2, -1 \pm i\sqrt{2}, f(x) = (x-2)(x^2 + 2x + 3) = (x-2)(x+1-i\sqrt{2})(x+1+i\sqrt{2}) \right]$

b. $f(x) = 4x^4 - 11x^2 + 9x - 2$ $\left[1, -2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, f(x) = 4(x-1)(x+2)(x-\frac{1}{2})^2 \right]$

c. $f(x) = x^5 - 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 5x + 6$
 $\left[1, -2, 3, i, -i, f(x) = (x-1)(x+2)(x-3)(x^2+1) = (x-1)(x+2)(x-3)(x+i)(x-i) \right]$

2. Zistite, či je $c = -2 + i$ koreňom polynómu $f(x)$ a rozložte ho na súčin ireducibilných polynómov nad R .

a. $f(x) = x^4 + 3x^3 + 2x^2 - x + 5$, b. $f(x) = x^5 + 3x^4 + 2x^2 - x^2 + 5x$
 $\left[\text{a. } f(x) = (x^2 + 4x + 5)(x^2 - x + 1), \quad \text{b. } f(x) = x(x^2 + 4x + 5)(x^2 - x + 1) \right]$

3*. Nájdite číslo $a \in R$ tak, aby mal polynóm $f(x) = x^3 - 27x - a$ viacnásobný koreň. $[a = \pm 54]$

4. Nájdite číslo $a \in C$ tak, aby bolo číslo $c = -1$ aspoň dvojnásobným koreňom polynómu $f(x) = x^5 - ax^2 - ax + 1$. $[a = -4]$

5. Racionálnu funkciu $r(x)$ napíšte ako súčet polynómu a elementárnych zlomkov nad R .

a. $r(x) = \frac{24x^2 - 15x + 71}{(x-1)(x^2+4)}$ $\left[\frac{-16}{x-1} + \frac{8x-7}{x^2+4} \right]$

b. $r(x) = \frac{x^4 - x^3 + 3x^2 + 5x}{2x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 10x - 4}$ $\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{3(x-1)^3} - \frac{1}{9(x-1)^2} + \frac{1}{27(x-1)} - \frac{1}{27(x+2)} \right]$

c. $r(x) = \frac{-x^3 - 2x^2 - x + 1}{(x^2 + 2x + 2)^2}$ $\left[\frac{x+1}{(x^2+2x+2)^2} - \frac{x}{(x^2+2x+2)} \right]$

TÝŽDEŇ 5

1. Nájdite definičný obor funkcie.

a. $f(x) = \sqrt{3x - x^2}$ $[(0, 3)]$ b. $f(x) = \ln \sqrt{3x - x^2}$ $[(0, 3)]$

c. $f(x) = \frac{1}{e^{2x} - e^x}$ $[R \setminus \{0\}]$ d. $f(x) = \frac{2}{3x^2 + x - 2}$ $[R \setminus \{-1, (2/3)\}]$

e. $f(x) = \arcsin(2-x)$ $[(1, 3)]$ d. $f(x) = \arccos \frac{1}{x+1}$ $[(-\infty, -2) \cup (0, \infty)]$

2. Určte definičný obor, inverznú funkciu a obor hodnôt funkcie f a rozhodnite, či je funkcia f zdola alebo zhora ohraničená.

a. $f(x) = \frac{x+1}{2x-1}$ $\left[D(f) = R \setminus \{ \frac{1}{2} \}, f^{-1}(y) = \frac{y+1}{2y-1}, H(f) = R \setminus \{ \frac{1}{2} \}, \text{neohraničená} \right]$

b. $f(x) = \ln(x-2) + 1$ $\left[D(f) = (2, \infty), f^{-1}(x) = e^{x-1} + 2, H(f) = R, \text{neohraničená} \right]$

c. $f(x) = e^{2x+1} - 3$ $\left[D(f) = R, f^{-1}(y) = -\frac{1}{2} + \ln \sqrt{y+3}, H(f) = (-3, \infty), \text{zdola} \right]$

d. $f(x) = \sqrt{1 - \ln(x-1)}$ $\left[(1, 1+e), f^{-1}(y) = 1 + e^{1-y^2}, D(f^{-1}) = H(f) = (0, \infty), \text{zdola} \right]$

3. Nájdite zloženú funkciu $F = g \circ f$ a určte $D(F)$

a. $f(x) = x^2 + 1$ $g(x) = \sqrt{x}$ $\left[F(x) = \sqrt{x^2 + 1}, D(F) = R \right]$

b. $f(x) = \sin x$ $g(x) = \sqrt{1-x^2}$ $\left[F(x) = \sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{\cos^2 x} = |\cos x|, D(F) = R \right]$

c. $f(x) = \sqrt{x-x^2}$ $g(x) = \arcsin x$ $\left[F(x) = \arcsin \sqrt{x-x^2}, D(F) = (0, 1) \right]$

4. Funkciu $F(x)$ napíšte ako zloženú funkciu

a. $F(x) = \ln \frac{x}{x+2}$ $\left[g(x) = \ln x, f(x) = \frac{x}{x+2}, F = g \circ f, D(F) = (-\infty, -2) \cup (0, \infty) \right]$

b. $F(x) = \sqrt{\sin^3 x}$ $\left[g(x) = \sqrt{x}, h(x) = x^3, f(x) = \sin x, F = g \circ h \circ f, D(F) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \langle 2k\pi, (2k+1)\pi \rangle \right]$

c. $F(x) = e^{x^2-x}$ $\left[g(x) = x^2 - x, f(x) = e^x, F = f \circ g, D(F) = R \right]$

d. $F(x) = \operatorname{tg}^3(2x)$ $\left[g(x) = \operatorname{tg} 2x, f(x) = x^3, F = f \circ g, D(F) = \mathbb{R} \setminus \{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z} \} \right]$

5. Zistite, či je funkcia f periodická, ak áno, nájdite (najmenšiu) periódu funkcie f .

a. $f(x) = \operatorname{tg} x + \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$, $[T = \pi]$

b. $f(x) = x \cos 2x$ [neperiodická]

c. $f(x) = \sin 2x - 2 \cos 3x + 1$ $[T = 2\pi]$

d. $f(x) = 2^{\sin 3x}$ $[T = \frac{2}{3}\pi]$

TÝŽDEŇ 6

1. Vypočítajte limity

a) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 + 3x}{x^2 + x - 6}$ $a = 1, -3$ $[-1, 3]$

c) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 3x - 4}$ $a = 2, -1$ $[-(3/2), -(3/5)]$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$ $[3]$

g) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 3x - 4}$ $[-\infty]$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^3 - 8}$ $[(1/4)]$

d) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 + 4x}$ $[(3/2)]$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{x}$ $[2]$

h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2x - 8}{2x^2 + 4x - 1}$ $[(1/2)]$

2. Nájdite definičný obor funkcie a vypočítajte limity funkcie v krajných bodoch definičného oboru

a. $f(x) = \sqrt{3x - x^2}$ $[(0, 3), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 0]$

b. $f(x) = \ln \sqrt{3x - x^2}$ $[(0, 3), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty]$

c. $f(x) = \frac{1}{e^{2x} - e^x}$ $[R \setminus \{0\}, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty]$

d. $f(x) = \frac{2}{3x^2 + x - 2}$ $[R \setminus \{-1, (2/3)\},]$

$$\left[\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (2/3)^+} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (2/3)^-} f(x) = -\infty \right]$$

e. $f(x) = \arcsin(2 - x)$ $[D(f) = (1, 3), \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \frac{\pi}{2}, \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\frac{\pi}{2}]$

f. $f(x) = \arccos \frac{1}{x+1}$ $[(-\infty, -2) \cup (0, \infty), \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}, \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \pi, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0]$

3. Vypočítajte limity.

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{\sqrt{7 - x} - 2}$ $[-4]$

c) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2x + 6} - 2}{x^2 - x - 2}$ $[-(1/6)]$

b) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$ $[-1]$

d) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{2}}{x^2 + x}$ $[(\sqrt{2}/2)]$

4. Vypočítajte limity.

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x \operatorname{arctg} x$ $[\infty]$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{e^x}$ $[0]$

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x - 1}{x}$ $[0]$

g) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x \cdot \operatorname{arccotg} x$ $[0]$

i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x}{3 - 2x^3}$ $[-\frac{1}{2}]$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x}$ $[-\infty]$

d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x}{\ln x}$ $[0]$

f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \cos x \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ $[0]$

h) $\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{arccotg} \frac{1}{x}$ $[0]$

j) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} + 1}{x + \sqrt{x} - 1}$ $[0]$

TÝŽDEŇ 7

1. Vypočítajte limity

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1} \right)^{2x} \quad [e^2]$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x+5} \right)^x \quad [e^{-2}]$

2. Zistite, či je funkcia $f(x) = \begin{cases} \sin x & x < 0 \\ \ln(x+1) & x \geq 0 \end{cases}$ spojitá v bode $a = 0$. [áno]

3. Zistite, kde je funkcia $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ \operatorname{arctg} \frac{1}{x} & x > 0 \end{cases}$ spojitá. [áno]

4. Zistite, či je funkcia $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} & x \geq 0, x \neq 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$ spojitá v bode $a = 1$. [nie]

5. Zistite, či je funkcia

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} & x \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi) \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$
 spojitá v bode $a = 0$. [áno]

6. Určte parameter p tak, aby funkcia

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \leq 2 \\ x^2 + 3px + p^2, & p > 2 \end{cases}$$
 bola spojitá v bode $a = 2$. [$p = -3 \pm \sqrt{7}$]

7. Nájdite maximálne spojité rozšírenie funkcie

a) $f(x) = \frac{x-3}{x^2-2x-3} \quad \left[\frac{1}{x+1}, x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \right]$

b) $f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{1}{x^2} \cdot \left[f_1(x) = \begin{cases} \operatorname{arccotg} \frac{1}{x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \right]$

TÝŽDEŇ 8

1. Vypočítajte derivácie funkcie f , určte $D(f)$, $D(f')$

a. $f(x) = \ln x + 2 \sin x - x^3 + 2 \quad [D(f) = D(f') = (0, \infty), f' = \frac{1}{x} + 2 \cos x - 3x^2]$

b. $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt[3]{x^4} \quad [D(f) = (0, \infty), D(f') = (0, \infty), f' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{4}{3}\sqrt[3]{x}]$

c. $f(x) = \operatorname{tg} x - \operatorname{arctg} x \quad [D(f) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq (\pi/2) + k\pi \forall k \in \mathbb{Z}\} = D(f'), f' = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{1+x^2}]$

d. $f(x) = 2e^x - \cos x + 3^x \quad [D(f) = D(f') = \mathbb{R}, f' = 2e^x + \sin x + 3^x \ln 3]$

e. $f(x) = \frac{x^2}{2x-1} \quad [D(f) = D(f') = \mathbb{R} \setminus \{1/2\}, f' = \frac{2x(x-1)}{(2x-1)^2}]$

f. $f(x) = (x^2 - 2x + 3)e^x, f'(1) = ? \quad [D(f) = d(f') = \mathbb{R}, f' = (x^2 + 1)e^x, f'(1) = 2e]$

g. $f(x) = \frac{(x-1)\ln x}{x^2+1}, f'(1) = ? \quad [D(f) = D(f') = (0, \infty), f' = \frac{x^3 - x^2 + x - 1 + (x+2x^2 - x^3)\ln x}{x(x^2+1)^2}, f'(1) = 0]$

h. $f(x) = \arcsin(2x-1), f(1/2) = ?, f'(1/2) = ?$
 $[D(f) = (0, 1), D(f') = (0, 1), f' = 1/\sqrt{x-x^2}, f(1/2) = 0, f'(1/2) = 2]$

i.* $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x, \quad [Df = (-\infty, -1) \cup (0, \infty), D(f') = D(f), f' = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \left(\ln \frac{x+1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)]$

2. Nájdite rovnicu dotyčnice ku grafu funkcie f v bode T .

a. $f(x) = e^{1-x^2}, T = (-1, ?) \quad [T = (-1, 1), t \equiv y - 1 = 2(x+1)]$

b. $f(x) = e^{1-x} \cos \pi x, T = (1, -1) \quad [t \equiv y = x - 2]$

3. Vypočítajte $f'(a)$ pre

a. $f(x) = |x+2|, a = -2, \quad [f'(-2) \text{ } \bar{a}]$

b. $a = 0, f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad [f'(0) = 0]$

4. Zistite, či je funkcia $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} & x \geq 0, x \neq 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$ spojitá v bode $a = 1$. [nie]

TÝŽDEŇ 9

L'Hospitalove pravidlá.

1. Vypočítajte limity

- a. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{\sin 2x}$ [3/2]
 b. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{e^{-x} - 1}$ [-2]
 c. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos 2x - 1}{\operatorname{tg} x}$ [0]
 d. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin x)}{\sin 4x}$ [1/4]
 e. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{\ln(x + 1)}$ [2]
 f. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - x}{e^{-x} + 1}$ [0]
 g. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\operatorname{cotg} x}$ [0]

2. Vypočítajte limity

- a. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \operatorname{arccotg} x$ [1]
 b. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x - 1) \operatorname{cotg} x$ [1]
 c. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 - \sin x) \operatorname{tg} x$ [0]
 d. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}}$ [e]
 e. $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^{2x} - 3x^2)$ [∞]
 f. $\lim_{x \rightarrow \infty} x (\ln(x + 1) - \ln x)$ [1]
 g. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^{2x} + x)^{\frac{1}{x}}$ [e^2]
 h. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 5x - \cos 2x}{\sin^2 x}$ [-21/2]

TÝŽDEŇ 10

Priebeh funkcie.1. Určte $D(f)$ a všetky asymptoty funkcie

- a) $f(x) = \frac{2x^3}{x^2 + 1}$, b) $f(x) = \ln(4 - x^2)$,
 c) $f(x) = x - 2 \operatorname{arctg} x$, d) $f(x) = \frac{x}{1 + x^2}$,
 e) $f(x) = \frac{x}{1 - x^2}$, f) $f(x) = \frac{e^x}{x + 1}$.

2. Určte $D(f)$, intervaly, na ktorých je daná funkcia monotónna a nájdite jej lokálne extrémny.

- a) $f(x) = \frac{10x}{(x + 2)^2}$,
 b) $f(x) = \ln(4 - x^2)$,
 c) $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$,
 d) $f(x) = x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}$.

3. Vyšetrite priebeh funkcie

- a) $f(x) = \frac{2x^3}{x^2 + 1}$, b) $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$, c) $f(x) = x \operatorname{arctg} x$, d) $f(x) = \frac{2}{e^x - 3}$.

4. Nech $f: R \rightarrow R$ má deriváciu $f': R \rightarrow R$. Určte intervaly monotónnosti a body x , v ktorých má daná funkcia lokálne extrémny, ak

- a) $f'(x) = e^{x^2 - 1}(2x + 5)(x + 1)^2(x - 2)$,
 b) $f'(x) = e^{x^2 - 1}(2x + 5)(x + 1)(x - 2)$.

5. Nech $f: R \rightarrow R$ má druhú deriváciu $f'': R \rightarrow R$. Určte intervaly na ktorých je funkcia f konvexná a body x , v ktorých má daná funkcia inflexný bod, ak

- a) $f''(x) = e^{x^2 + 1}(2x + 5)(x + 1)^2(x - 2)$,
 b) $f''(x) = e^{x^2}(2x + 5)(x + 1)(x - 2)$.
 c) $f'(x) = e^{x^2}(x + 1)$.

6. Určte $D(f)$, $D(f')$ a $D(f'')$ a napíšte Taylorov polynóm $T_2(f, a, x)$ ak

- a) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$, $a = 1$, b) $f(x) = \ln x$, $a = 2$,
 c) $f(x) = \frac{1 + x + x^2}{1 - x + x^2}$, $a = 0$, d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, $a = 0$
 e. $f(x) = \sqrt{1 - 2x}$, $a = 0$. [$T_2(f, 0, x) = 1 - x - \frac{1}{2}x^2$]
 f. $f(x) = \sin^2 x$, $a = \frac{\pi}{2}$ [$T_2(f, \pi/2, x) = 1 - (x - \pi/2)^2$]
 g. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + 3x}}$, $a = 1$ [$T_2(f, 1, x) = 2 - \frac{3}{2}(x - 1) + \frac{27}{4}(x - 1)^2$]

TÝŽDEŇ 11

Postupnosti a rady.

1. Vypočítajte limity postupností.

a. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 2n^2 - 1}{-2n^2 + 1}$ $[-\infty]$ d. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 2n^2 - 1}{-2^{2n} + 2^n}$ $[0]$

b. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n^2 - 1}{-2n^2 + 1}$ $[-\frac{1}{2}]$ e. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n+1}$ $[e^2]$

c. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3^n}$ $[0]$ f. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$ $[1/e]$

2. Vypočítajte súčet s_n prvých n členov postupnosti $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$

a. $a_k = 2k$, $[s_n = n(n+1) \rightarrow \infty]$ b. $a_k = -(2k+1)$ $[s_n = -n(n+2) \rightarrow -\infty]$

c. $a_k = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ $[s_n = 1 - \frac{1}{n+1} \rightarrow 1]$ d. $a_k = \frac{5^k}{3^{k+1}}$ $[s_n = \frac{1-(5/3)^n}{-2} \rightarrow \infty]$

e. $a_k = \ln \frac{k+3}{k+1}$ $[s_n = \ln \frac{(n+2)(n+3)}{6} \rightarrow \infty]$

3. Vypočítajte súčet radov, ak sú konvergentné.

a. $\sum_{n=1}^{\infty} -3n$ [diverguje] b. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{k}{k+1}$ [diverguje] c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{3^{n+1}}$ $[-2/15]$

d. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{2n}}{5^{n-1}}$ [diverguje] e. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1-2^{2n}}{5^n}$ $[-63/20]$

4. Nájdite postupnosť čiastočných súčtov radu, vyšetrite konvergenciu radu. Ak je rad konvergentný, nájdite súčet radu.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+4)(n+5)}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2 + 4n + 3}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1})$

5. Vyšetrite konvergenciu radu, ak je rad konvergentný, nájdite súčet radu.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{3^{n+1}}$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{2n}}{5^{n-1}}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-2^n}{3^{n-1}}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + (-3)^{n+1}}{2^{2n+1}}$

6. Pomocou porovnávacieho kritéria vyšetrite konvergenciu radu (t.j. zistite, či je konvergentný alebo divergentný).

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(n+2)}$

b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n}{n^2-1}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg n}{\sqrt{n}}$

7. Vyšetrite konvergenciu radu.

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{3^n(n+1)!}$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{5^n(n+1)}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{3^{2n+1}}$

d) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{n^2-2n}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$

f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!}$

8. Vyšetrite konvergenciu radu.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n^2}$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n+2}{3n+5}\right)^{2n}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{n+1}\right)^{n^2}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n^2}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^n}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{n^2}$

9. Zistite, či daný rad konverguje a či konverguje absolutně.

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$$

$$\text{b) } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+1}{3n} \right)^n$$

$$\text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2+1}$$

$$\text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+3}{2n+1}$$

$$\text{e) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2+3n}$$

$$\text{f) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$$

$$\text{g) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n)}{n}$$

$$\text{h) } \sum_{n=1}^{\infty} \cos ne^{-2n}$$

TÝŽDEŇ 12

Mocninové rady

1. Najdite obor konvergence mocninového radu.

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}2^n} (x-1)^n$$

$$\text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} (x+2)^n$$

$$\text{c) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-10)^n}{(n+1)!}$$

$$\text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2n+1}$$

$$\text{e) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{5^n} (x-5)^n$$

$$\text{f) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n^2} (x-3)^{2n}$$

2. Najdite interval konvergence mocninového radu a součet radu.

$$\text{a) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{3^n}$$

$$\text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (x+2)^n$$

$$\text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} n(x-5)^n$$