DERIVÁCIE VYŠŠÍCH RÁDOV, MONOTÓNNOSŤ, EXTRÉMY FUNKCIE, KONVEXNOSŤ, KONKÁVNOSŤ, INFLEXNÉ BODY

Príklad 1: Dokážte, že rovnica $x^3 - 3x^2 + 6x - 1 = 0$ má len jeden (jednonásobný) reálny koreň.

Riešenie:

Označme $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 1$, potom $D(f) = \mathbb{R}$ a f je spojitá. Platí:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty,$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty.$$

Teda $H(f) = \mathbb{R}$ a pretože f je spojitá, rovnica $f(x) = 0$ má určite aspoň jeden reálny koreň. Zderivujme funkciu f:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 6 = 3(x^2 - 2x + 2) = 3((x-1)^2 + 1).$$

Teda $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$. Z toho vyplýva, že každý koreň rovnice $f(x) = 0$ je jednonásobný a funkcia f je rastúca na celom $\mathbb{R}$. Keďže f je spojitá a rastúca na celom $\mathbb{R}$, tak jej graf pretína os O_x v jedinom bode, označme ho $A = (a, 0)$. Rovnica $f(x) = 0$ má preto práve jeden (jednonásobný) reálny koreň a, tj. $f(a) = 0$.

Iný postup:

Postup pracuje s Rolleho vetou. Dôkaz je v prvej časti rovnaký ako v predošlom, tj.:
Funkcia f je taká, že $D(f) = \mathbb{R}$, f je spojitá a platí:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty,$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty.$$

$H(f) = \mathbb{R}$ a pretože f je spojitá, rovnica $f(x) = 0$ má aspoň jeden reálny koreň. Derivácia funkcie f spĺňa $f'(x) = 3x^2 - 6x + 6 = 3(x^2 - 2x + 2) = 3((x-1)^2 + 1)$ a teda $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$. Z toho vyplýva, že každý koreň rovnice $f(x) = 0$ je jednonásobný.

Predpokladajme, že rovnica $f(x) = 0$ má (aspoň) dva korene, označme ich x_1, x_2 a bez straty na všeobecnosti predpokladajme, že $x_1 < x_2$. Funkcia f na intervale $\langle x_1, x_2\rangle$ spĺňa predpoklady Rolleho vety a teda existuje také $c \in (x_1, x_2)$, že $f'(c) = 0$. To však nie je možné, pretože $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$. Je to spor s predpokladom a teda rovnica $f(x) = 0$ má práve jeden (jednonásobný) koreň.

Príklad 2: Ukážte, že pre každé $x \in \langle -\sqrt{3}, -1\rangle$ funkcia $f(x) = x + 2\operatorname{arccotg} x$ spĺňa: $f(x) > 0$.

Riešenie:

Platí $f(-\sqrt{3}) = -\sqrt{3} + 2\operatorname{arccotg}(-\sqrt{3}) = -\sqrt{3} + 2\left(\frac{5}{6}\pi\right) = -\sqrt{3} + \frac{5}{3}\pi > 0$. Funkcia f je spojitá a diferencovateľná na $\langle -\sqrt{3}, -1\rangle$. Zderivujme funkciu f:

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{1+x^2} = \frac{1 + x^2 - 2}{1 + x^2} = \frac{x^2 - 1}{1 + x^2}.$$

Teda $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in \langle -\sqrt{3}, -1)$ a $f'(-1) = 0$. Z toho vyplýva, že f je rastúca na $\langle -\sqrt{3}, -1\rangle$. Keďže f je spojitá a rastúca na $\langle -\sqrt{3}, -1\rangle$ a $f(-\sqrt{3}) > 0$, tak pre každé $x \in \langle -\sqrt{3}, -1\rangle$ platí: $f(x) > 0$.

Príklad 3: Dokážte, že pre všetky $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ platí:

$$|\sin x_1 - \sin x_2| \leq |x_1 - x_2|$$

Riešenie:

Ak $x_1 = x_2$, tvrdenie je zrejme pravdivé. Predpokladajme $x_1 \neq x_2$ bez straty na všeobecnosti také, že $x_1 < x_2$. Označme $f(x) = \sin x$. Funkcia f je spojitá a diferencovateľná na celom $\mathbb{R}$, pričom $f'(x) = \cos x$.

Funkcia f na intervale $\langle x_1, x_2 \rangle$ spĺňa predpoklady Lagrangeovej vety a teda existuje také $c \in (x_1, x_2)$, že $f'(c) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ alebo tiež $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$. Z toho vyplýva:

$$|f(x_2) - f(x_1)| = |f'(c)||x_2 - x_1|.$$

Pretože $|f'(c)| = |\cos c| \leq 1$, tak dostávame:

$$|f(x_2) - f(x_1)| = |f'(c)||x_2 - x_1| \leq |x_2 - x_1|.$$

Príklad 4: Nech $f: I \to \mathbb{R}$, kde I je interval, je taká, že pre všetky $x \in I$ platí $f'(x) = 0$. Dokážte, že f je konštantná na I.

Riešenie:

Zvoľme pevné $a \in I$. Nech $x \in I$, $x \neq a$ je ľubovoľné. Podľa Lagrangeovej vety existuje také $c \in (a, x)$, resp. $c \in (x, a)$, že $f'(c) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ alebo tiež $f(x) - f(a) = f'(c)(x - a)$. Pretože podľa predpokladu musí byť $f'(c) = 0$, tak $f(x) = f(a)$.

Príklad 5: S využitím tvrdenia v **príklade 4** ukážte, že pre každé $x \in \mathbb{R}$ platí:

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}$$

Riešenie:

Označme $f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x$. Pre každé $x \in \mathbb{R}$ platí:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0.$$

Teda f je konštantná na $\mathbb{R}$. Hodnotu konštanty zistíme z funkčnej hodnoty v niektorom bode z $\mathbb{R}$, napr.:

$$f(0) = \operatorname{arctg} 0 + \operatorname{arccotg} 0 = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Príklad 6: Vyšetrite monotónnosť a lokálne extrémy funkcie f, ak:

a) $f(x) = \frac{x^2+x-1}{x^2-2x+1}$

Riešenie:

Pretože $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$, tak $f(x) = \frac{x^2+x-1}{(x-1)^2}$ a $D(f) = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$. Zderivujme funkciu f:

$$f'(x) = \frac{(2x+1)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^2+x-1)}{(x-1)^4} = \frac{(2x+1)(x-1) - 2(x^2+x-1)}{(x-1)^3}$$
$$= \frac{2x^2 - x - 1 - 2x^2 - 2x + 2}{(x-1)^3} = \frac{1-3x}{(x-1)^3}.$$

Platí teda $f'\left(\frac{1}{3}\right) = 0$. Nasledujúca tabuľka ukazuje, kde je derivácia kladná a kde záporná:

	$\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$	$\left(\frac{1}{3}, 1\right)$	$(1, \infty)$
$1-3x$	> 0	< 0	< 0
$(x-1)^3$	< 0	< 0	> 0
$f'(x)$	< 0	> 0	< 0

Intervaly monotónnosti funkcie: Funkcia je klesajúca na intervale $(-\infty, 1/3\rangle$ a na intervale $(1, \infty)$.
Funkcia je rastúca na intervale $\langle 1/3, 1)$.

Funkcia má v bode $\frac{1}{3}$ ostré lokálne minimum s hodnotou $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\frac{1}{9}+\frac{1}{3}-1}{\frac{1}{9}-\frac{2}{3}+1} = \frac{-\frac{5}{9}}{\frac{4}{9}} = -\frac{5}{4}$.

b) $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

Riešenie:

$D(f) = (0, \infty)$. Zderivujme funkciu f:

$$f'(x) = \frac{\frac{\sqrt{x}}{x} - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{\frac{2}{2\sqrt{x}} - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}} = \frac{2 - \ln x}{2x^{3/2}}.$$

Platí teda $f'(e^2) = 0$. Nasledujúca tabuľka ukazuje, kde je derivácia kladná a kde záporná:

	$(0, e^2)$	(e^2, ∞)
$2 - \ln x$	> 0	< 0
$2x^{3/2}$	> 0	> 0
$f'(x)$	> 0	< 0

Intervaly monotónnosti funkcie: Funkcia je rastúca na intervale $(0, e^2\rangle$.
Funkcia je klesajúca na intervale $\langle e^2, \infty)$.

Funkcia má v bode e^2 ostré lokálne maximum s hodnotou $f(e^2) = \frac{\ln e^2}{\sqrt{e^2}} = \frac{2}{e}$.

c) $f(x) = (x^2 + 6x + 3)e^{2x}$

Riešenie:

$D(f) = \mathbb{R}$. Zderivujme funkciu f:

$$f'(x) = (2x+6)e^{2x} + 2(x^2+6x+3)e^{2x} = 2(x+3)e^{2x} + 2(x^2+6x+3)e^{2x}$$
$$= 2e^{2x}(x^2 + 7x + 6).$$

Platí teda $f'(-6) = 0$ a $f'(-1) = 0$. Nasledujúca tabuľka ukazuje, kde je derivácia kladná a kde záporná:

	$(-\infty, -6)$	$(-6, -1)$	$(-1, \infty)$
$x^2 + 7x + 6$	> 0	< 0	> 0
$2e^{2x}$	> 0	> 0	> 0
$f'(x)$	> 0	< 0	> 0

Intervaly monotónnosti funkcie: Funkcia je rastúca na intervale $(-\infty, -6\rangle$ a na intervale $\langle -1, \infty)$.
Funkcia je klesajúca na intervale $\langle -6, -1\rangle$.

Funkcia má v bode -6 ostré lokálne maximum s hodnotou $f(-6) = (36 - 36 + 3)e^{-2.6} = 3e^{-12} = \frac{3}{e^{12}}$. Funkcia má v bode -1 ostré lokálne minimum s hodnotou $f(-1) = (1 - 6 + 3)e^{-2.1} = -2e^{-2} = \frac{-2}{e^2}$.

d) $f(x) = \frac{2x^3}{x^2+1}$

Riešenie:

$D(f) = \mathbb{R}$. Zderivujme funkciu f:

$$f'(x) = \frac{6x^2(x^2+1) - 2x^3 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^2(3x^2+3-2x^2)}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}.$$

Platí teda $f'(0) = 0$ a $f'(x) > 0$ pre každé $x \in \mathbb{R}$ také, že $x \neq 0$. Funkcia f nemá extrém a je rastúca na celom $\mathbb{R}$.

e) $f(x) = x^{2/3}e^{-x}$

Riešenie:

$D(f) = \mathbb{R}$. Zderivujme funkciu f:

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3}e^{-x} - x^{2/3}e^{-x} = x^{-1/3}e^{-x}\left(\frac{2}{3} - x\right) = \frac{2-3x}{3x^{1/3}e^x}.$$

Platí $D(f') = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a $f'\left(\frac{2}{3}\right) = 0$. Nasledujúca tabuľka ukazuje, kde je derivácia kladná a kde záporná:

	$(-\infty, 0)$	$\left(0, \frac{2}{3}\right)$	$\left(\frac{2}{3}, \infty\right)$
$2-3x$	> 0	> 0	< 0
$x^{1/3}$	< 0	> 0	> 0
$3e^x$	> 0	> 0	> 0
$f'(x)$	< 0	> 0	< 0

Intervaly monotónnosti funkcie: Funkcia je klesajúca na intervale $(-\infty, 0\rangle$ a na intervale $\langle 2/3, \infty)$.
Funkcia je rastúca na intervale $\langle 0, 2/3\rangle$.

Funkcia má v bode $\frac{2}{3}$ ostré lokálne maximum s hodnotou $f\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^{2/3} e^{-2/3} = \left(\frac{2}{3e}\right)^{2/3}$. Hoci v bode 0 neplatí $f'(0) = 0$, pretože funkcia f nemá v 0 deriváciu, f má v bode 0 ostré lokálne minimum s hodnotou $f(0) = (0)^{2/3}e^0 = 0$. Je tomu skutočne tak, pretože $f(x) = \sqrt[3]{x^2}e^{-x} > 0$ pre všetky $x \neq 0$ ležiace ľubovoľne blízko bodu 0.

Príklad 7: Nájdite maximum a minimum funkcie f a určte intervaly monotónnosti, ak f je definovaná na A, kde:

a) $f(x) = x^2 + x - 2, A = \langle -3,3\rangle$

Riešenie:

f je spojitá funkcia definovaná na ohraničenom, uzavretom intervale a teda dosahuje na ňom svoje maximum i minimum. Extrémy funkcie f budú ležať v stacionárnych bodoch alebo v hraničných bodoch intervalu. Zderivujme funkciu f:

$$f'(x) = 2x + 1$$

Stacionárny bod je $-\frac{1}{2}$, pretože $f'\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$. Platí $-\frac{1}{2} \in A$. Pre každé $x \in (-1/2, 3\rangle$ je $f'(x) > 0$ a pre každé $x \in \langle -3, -1/2)$ je $f'(x) < 0$. Z toho vyplýva, že funkcia je rastúca na intervale

$\langle -1/2, 3\rangle$ a klesajúca na intervale $\langle -3, -1/2\rangle$. Platí: $f(-3) = 4, f(3) = 10, f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{9}{4}$. Čiže funkcia f dosahuje na A globálne minimum v bode $-\frac{1}{2}$ a globálne maximum v bode 3. Pre každé $x \in A$ platí:

$$-\frac{9}{4} = f\left(-\frac{1}{2}\right) \leq f(x) \leq f(3) = 10.$$

b) $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $A = \langle 2,3\rangle$

Riešenie:

f je spojitá funkcia definovaná na ohraničenom, uzavretom intervale a teda dosahuje na ňom svoje maximum i minimum. Extrémy funkcie f budú ležať v stacionárnych bodoch alebo v hraničných bodoch intervalu. Zderivujme funkciu f:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$$

Stacionárne body sú 1 a -1, pretože $f'(1) = f'(-1) = 0$. Ale $-1 \notin A$ ani $1 \notin A$. Pre každé $x \in A$ platí $f'(x) > 0$ a teda funkcia f je rastúca na A. Funkcia f dosahuje na A globálne minimum v bode 2 a globálne maximum v bode 3. Pre každé $x \in A$ platí:

$$\frac{3}{2} = f(2) \leq f(x) \leq f(3) = \frac{10}{3}.$$

c) $f(x) = \sin x - x$, $A = \langle -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\rangle$

Riešenie:

f je spojitá funkcia definovaná na ohraničenom, uzavretom intervale a teda dosahuje na ňom svoje maximum i minimum. Extrémy funkcie f budú ležať v stacionárnych bodoch alebo v hraničných bodoch intervalu. Zderivujme funkciu f:

$$f'(x) = cos\, x - 1$$

Stacionárny bod patriaci do A je jediný, je to bod 0. Pre každé $x \in A$, $x \neq 0$ je $0 < \cos x < 1$, preto pre tieto body platí $f'(x) < 0$ a teda funkcia f je klesajúca na A. Funkcia f dosahuje na A globálne minimum v bode $\frac{\pi}{3}$ a globálne maximum v bode $-\frac{\pi}{4}$. Pre každé $x \in A$ platí:

$$\frac{3\sqrt{3} - 2\pi}{6} = f\left(\frac{\pi}{3}\right) \leq f(x) \leq f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi - 2\sqrt{2}}{4}.$$

Príklad 8: Vypočítajte druhú deriváciu funkcie f, ak:

a) $f(x) = \frac{x^2+x-1}{x^2-2x+1}$

Riešenie:

V **príklade 6a)** sme vypočítali, že: $f'(x) = \frac{1-3x}{(x-1)^3}$. Potom:

$$f''(x) = \left(f'(x)\right)' = \left(\frac{1-3x}{(x-1)^3}\right)' = \frac{-3(x-1)^3 - 3(1-3x)(x-1)^2}{(x-1)^6}$$
$$= \frac{-3(x-1)^2(x-1+1-3x)}{(x-1)^6} = \frac{6x}{(x-1)^4}$$

b) $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

Riešenie:

V **príklade 6b)** sme vypočítali, že: $f'(x) = \frac{2-\ln x}{2x^{3/2}}$. Potom:

$$f''(x) = \left(f'(x)\right)' = \left(\frac{2-\ln x}{2x^{3/2}}\right)' = \frac{1}{2}\left(\frac{2-\ln x}{x^{3/2}}\right)' = \frac{1}{2}\left(\frac{-\frac{1}{x}x^{3/2} - \frac{3}{2}(2-\ln x)x^{1/2}}{x^3}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\left(-x^{1/2}\right)\left(1+3-\frac{3}{2}\ln x\right)}{x^3} = -\frac{1}{2}\frac{\left(\frac{8-3\ln x}{2}\right)}{x^{5/2}} = \frac{3\ln x - 8}{4x^{5/2}}$$

c) $f(x) = (x^2+6x+3)e^{2x}$

Riešenie:

V **príklade 6c)** sme vypočítali, že: $f'(x) = 2e^{2x}(x^2+7x+6)$. Potom:

$$f''(x) = \left(f'(x)\right)' = \left(2e^{2x}(x^2+7x+6)\right)' = 2\left(e^{2x}(x^2+7x+6)\right)'$$
$$= 2\left(2e^{2x}(x^2+7x+6) + e^{2x}(2x+7)\right) = 2e^{2x}(2x^2+14x+12+2x+7)$$
$$= 2e^{2x}(2x^2+16x+19)$$

Príklad 9: Uvažujte funkciu $f(x) = xe^x$. Ukážte, že n-tá derivácia funkcie f, tj. $f^{(n)}$, má predpis: $f^{(n)}(x) = (x+n)e^x$, kde $n \in \mathbb{N}$.

Riešenie:

Tvrdenie dokážeme matematickou indukciou. Napíšme prvú deriváciu funkcie f:

$$f'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x$$

Skutočne teda pre $n = 1$ máme $f^{(n)}(x) = (x+n)e^x$. Pre $n \geq 2$ urobme predpoklad $f^{(n-1)}(x) = (x+n-1)e^x$. Ukážeme, že z toho vyplýva $f^{(n)}(x) = (x+n)e^x$.

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)' = \left((x+n-1)e^x\right)' = e^x + (x+n-1)e^x = (x+n)e^x$$

Príklad 10: Uvažujte funkciu $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Nájdite predpis n-tej derivácie funkcie f, tj. $f^{(n)}$, kde $n \in \mathbb{N}$. Ukážte, že $f^{(n)}(0) = n!$

Riešenie:

Napíšme najprv niekoľko prvých iterácií, aby sme mohli vysloviť hypotézu o $f^{(n)}$:

$$f'(x) = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = ((1-x)^{-1})' = -1(1-x)^{-2}(1-x)' = (1-x)^{-2} = \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1!}{(1-x)^2}$$

$$f''(x) = \left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)' = ((1-x)^{-2})' = -2(1-x)^{-3}(1-x)' = 2(1-x)^{-3} = \frac{2}{(1-x)^3} = \frac{2!}{(1-x)^3}$$

$$f'''(x) = \left(\frac{2}{(1-x)^3}\right)' = (2(1-x)^{-3})' = -6(1-x)^{-4}(1-x)' = 6(1-x)^{-4} = \frac{6}{(1-x)^4} = \frac{3!}{(1-x)^4}$$

Zrejme $f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$. Tvrdenie dokážeme matematickou indukciou. Pre $n \geq 2$ (pre $n = 1$ tvrdenie platí, ako vidno vyššie) urobme predpoklad $f^{(n-1)}(x) = \frac{(n-1)!}{(1-x)^n}$. Ukážeme, že z toho vyplýva $f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$.

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)' = \left(\frac{(n-1)!}{(1-x)^n}\right)' = \left((n-1)!\,(1-x)^{-n}\right)' = -n(n-1)!\,(1-x)^{-n-1}(1-x)'$$
$$= n!\,(1-x)^{-(n+1)} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$$

Ak $f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ pre $n \in \mathbb{N}$, tak $f^{(n)}(0) = \frac{n!}{(1-0)^{n+1}} = \frac{n!}{1} = n!$

Príklad 11: Vyšetrite konvexnosť, konkávnosť a inflexné body funkcie f, ak:

a) $f(x) = \frac{x^2+x-1}{x^2-2x+1}$

Riešenie:

Druhú deriváciu funkcie f sme už našli (viď. **Príklad 8a)**):

$$f''(x) = \frac{6x}{(x-1)^4}$$

Platí $f''(0) = 0$. Nasledujúca tabuľka ukazuje, kde je druhá derivácia kladná a kde záporná:

	$(-\infty, 0)$	$(0,1)$	$(1, \infty)$
$6x$	< 0	> 0	> 0
$(x-1)^4$	> 0	> 0	> 0
$f''(x)$	< 0	> 0	> 0

Z toho vyplýva, funkcia f je konvexná na $\langle 0, 1)$ a na $(1, \infty)$, funkcia f je konkávna na $(-\infty, 0\rangle$. Inflexný bod funkcie sa nachádza v 0.

b) $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

Riešenie:

Druhú deriváciu funkcie f sme už našli (viď. **Príklad 8b)**):

$$f''(x) = \frac{3\ln x - 8}{4x^{5/2}}$$

Platí $f''\left(e^{8/3}\right) = 0$. Nasledujúca tabuľka ukazuje, kde je druhá derivácia kladná a kde záporná:

	$\left(0, e^{8/3}\right)$	$\left(e^{8/3}, \infty\right)$
$3\ln x - 8$	< 0	> 0
$4x^{5/2}$	> 0	> 0
$f''(x)$	< 0	> 0

Z toho vyplýva, funkcia f je konvexná na $\left\langle e^{8/3}, \infty\right)$ a konkávna na $\left(0, e^{8/3}\right\rangle$. Inflexný bod funkcie sa nachádza v $e^{8/3}$.

c) $f(x) = f(x) = (x^2 + 6x + 3)e^{2x}$

Riešenie:

Druhú deriváciu funkcie f sme už našli (viď. **Príklad 8c)**):

$$f''(x) = 2e^{2x}(2x^2 + 16x + 19)$$

Platí $f''\left(-4 + \frac{\sqrt{26}}{2}\right) = 0$ a $f''\left(-4 - \frac{\sqrt{26}}{2}\right) = 0$. Nasledujúca tabuľka ukazuje, kde je druhá derivácia kladná a kde záporná:

	$\left(-\infty, -4-\frac{\sqrt{26}}{2}\right)$	$\left(-4-\frac{\sqrt{26}}{2}, -4+\frac{\sqrt{26}}{2}\right)$	$\left(-4+\frac{\sqrt{26}}{2}, \infty\right)$
$2x^2+16x+19$	>0	<0	>0
$2e^{2x}$	>0	>0	>0
$f''(x)$	>0	<0	>0

Z toho vyplýva, funkcia f je konvexná na $\left(-\infty, -4-\frac{\sqrt{26}}{2}\right\rangle$ a na $\left\langle -4+\frac{\sqrt{26}}{2}, \infty\right)$. Funkcia je konkávna na $\left\langle -4-\frac{\sqrt{26}}{2}, -4+\frac{\sqrt{26}}{2}\right\rangle$. Inflexné body funkcie sú v $-4+\frac{\sqrt{26}}{2}$ a v $-4-\frac{\sqrt{26}}{2}$.

Ďalšia literatúra k cvičeniu, z ktorej môžete čerpať, sa nachádza na stránke predmetu: http://matika.elf.stuba.sk/KMAT/Matematika1/ParalelkaC

Ide o súbor:

1. Riesene_priklady9-10.pdf
   http://matika.elf.stuba.sk/KMAT/Matematika1/ParalelkaC?action=AttachFile&do=get&target=Riesene_priklady9-10.pdf

Konkrétne si prejdite: **14.-16.príklad**. V každom z týchto príkladov sa venujte bodom 1., 4., 5., 6. a 7.

Domáce úlohy

Komentár: Tento týždeň semestra **bez domácej úlohy**.