

Contents

1	Úvod	3
1.1	Pomocné pojmy	3
1.2	Príklady	5
2	Diferenciálny počet	9
2.1	Úvodné pojmy.	9
2.2	Limita a spojitost' funkcie	9
2.2.1	Príklady	12
2.3	Postupnosti	17
2.3.1	Príklady	18
2.4	Nekonečné rady	19
2.4.1	Príklady	22
2.5	Diferencovateľnosť funkcie	26
2.6	Priebeh funkcie	28
2.6.1	Lokálne extrémny	28
2.6.2	Intervalové vlastnosti funkcií	28
2.6.3	Príklady	29
2.6.4	Monotónnosť	34
2.6.5	Konvexnosť, konkávnosť, inflexný bod	35
2.6.6	Príklady	37

Chapter 1

Úvod

1.1 Pomocné pojmy

O funkcii budeme hovoriť v tom prípade, keď máme k dispozícii dve množiny A, B a pravidlo (predpis) f , pomocou ktorého je každému prvku $x \in A$ priradený práve jeden prvok $f(x) \in B$. (Zapisujeme $x \mapsto f(x)$.) Teda funkcia je vlastne trojica (A, B, f) , čo budeme zapisovať v tvare

$$f : A \longrightarrow B.$$

V tejto súvislosti množinu A nazývame definičný obor (obor definície) funkcie f . Zvykneme používať aj označenie $A = \mathcal{D}(f)$. Množinu B nazývame koobor funkcie f . Oborom hodnôt funkcie f nazývame množinu

$$\mathcal{H}(f) = \{f(x) \mid x \in A\}.$$

Je zrejmé, že vždy platí $\mathcal{H}(f) \subseteq B$. O obore hodnôt má zmysel uvažovať iba v prípade zloženej funkcie a pri inverznej funkcii. Vo zvyšných prípadoch vystačíme s kooborom.

Definícia 1 *Nech $f : A \longrightarrow B$ a $g : B \longrightarrow C$ sú dané funkcie. Potom je definovaná funkcia*

$$h = (g \circ f) : A \longrightarrow C, h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Túto funkciu nazývame zložená funkcia (kompozícia) z funkcií f a g . Funkciu $g : B \longrightarrow C$ nazývame hlavná zložka a funkciu $f : A \longrightarrow B$ vedľajšia zložka zloženej funkcie.

Definícia 2 *Uvažujme o funkcii $f : A \longrightarrow B$.*

- 1. Nech pre každé $x_1, x_2 \in A$ také, že $x_1 \neq x_2$, je $f(x_1) \neq f(x_2)$. Potom hovoríme, že funkcia f je injekcia.*

2. Nech $B = \mathcal{H}(f)$. Potom hovoríme, že funkcia f je surjekcia.

3. Ak f je injekcia a aj surjekcia súčasne, tak ju nazývame bijekcia.

Definícia 3 Nech funkcia $f : A \rightarrow B$ je bijekcia. Potom je definovaná funkcia

$$f^{-1} : B \rightarrow A, y \mapsto f^{-1}(y)$$

taká, že

$$f^{-1}(y) = x \text{ práve vtedy, keď } f(x) = y.$$

Funkciu $f^{-1} : B \rightarrow A$ nazývame inverzná funkcia funkcie f .

Tento semester sa budeme zaoberať len reálnymi funkciami jednej reálnej premennej. To znamená, že $A \subseteq \mathbb{R}$ a aj $B \subseteq \mathbb{R}$. Pretože vo väčšine prípadov nás nebude zaujímať obor hodnôt funkcie, budeme uvažovať o maximálne možnom koobore, a teda položíme $B = \mathbb{R}$. Túto dohodu budeme zapisovať v tvare

$$f : A \rightarrow \mathbb{R}.$$

Definícia 4 Uvažujme o funkcii $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Nech A je taká množina, že pre každé $x \in A$ aj $-x \in A$. Potom:

1. Ak pre každé $x \in A$ platí

$$f(-x) = f(x),$$

tak hovoríme, že funkcia f je párna. (Jej graf je súmerný podľa osi y -ovej.)

2. Ak pre každé $x \in A$ platí

$$f(-x) = -f(x),$$

tak hovoríme, že funkcia f je nepárna. (Jej graf je súmerný podľa začiatku súradnicovej sústavy.)

Definícia 5 Uvažujme o funkcii $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Nech existuje $T > 0$ také, že

1. pre každé $x \in \mathbb{R}$ platí: $x \in A$ práve vtedy, keď $x + T \in A$,

2. pre každé $x \in A$ platí $f(x) = f(x + T)$.

Potom hovoríme, že f je periodická funkcia a T je jej perióda. Ak existuje najmenšie $T > 0$, ktoré spĺňa podmienky periodičnosti funkcie, tak ho nazývame najmenšia perióda funkcie f .

Poznamenávame, že nie každá periodická funkcia musí mať najmenšiu periódu (viď konštantná funkcia).

Definícia 6 Nech $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ je daná funkcia. Potom množinu

$$\mathcal{G}(f) = \{(x, f(x)) \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \in A\}$$

nazývame graf funkcie f .

Definícia 7 Nech $A \subset \mathbb{R}$ a existuje také $M > 0$, že pre každé $x \in A$ platí $|x| \leq M$. Potom hovoríme, že množina A je ohraničená.

Definícia 8 Uvažujme o funkcii $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Ak jej obor hodnôt $\mathcal{H}(f)$ je ohraničená množina, tak hovoríme, že funkcia f je ohraničená.

1.2 Príklady

Časť I

1. V nasledujúcich príkladoch nájdite definičný obor funkcie f , keď

(a) $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sin(2x)} + \log(1-x)$ $[-1, 0) \cup (0, 1]$.

(b) $f(x) = \sqrt{3 - \log_2 x}$ $[(0, 8)]$.

(c) $f(x) = \sqrt{2 \cos(3x) - \sqrt{3}}$.
 $[\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \langle -\frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}, \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \rangle, k \in \mathbb{Z}]$.

2. V nasledujúcich príkladoch nájdite definičný obor funkcie f a vyšetrite párnosť a nepárnosť funkcie, keď

(a) $f(x) = \frac{x-4}{\sqrt{x^2-x-2}}$.
 $[(-\infty, -1) \cup (2, \infty); \text{nie je párna, ani nepárna}]$.

(b) $f(x) = \frac{a^{x+1}}{a^x-1}$ $[\mathbb{R} \setminus \{0\}; \text{nepárna}]$.

3. Daná je funkcia $f : f(x) = |x| \sqrt{\frac{x^2-4}{|4-x^2|}}$. Nájdite definičný obor, obor funkčných hodnôt, upravte predpis funkcie a potom načrtnite graf.

$[\mathcal{D}(f) = (-\infty, -2) \cup (2, \infty); \mathcal{H}(f) = (2, \infty)]$.

4. Zistite, či k funkcii $\sqrt{1 - \log_2(x-1)}$ existuje inverzná funkcia, ak áno, nájdite ju.

$\left[\begin{array}{l} f : (1, 3) \rightarrow \langle 0, \infty \rangle \text{ je bijekcia,} \\ f^{-1} : \langle 0, \infty \rangle \rightarrow (1, 3), f^{-1}(x) = 2^{1-x^2} + 1. \end{array} \right]$.

5. V nasledujúcich príkladoch sú dané funkcie $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow \mathbb{R}$. Nájdite množiny A, B tak, aby existovala zložená funkcia $g \circ f$ a potom nájdite jej predpis.

(a) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}, g(x) = \sqrt{x}$.

$\left[\begin{array}{l} A = (-\infty, -1) \cup (1, \infty), B = \langle 0, \infty \rangle \\ f : (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \rightarrow \langle 0, \infty \rangle, f(x) = \frac{x+1}{x-1}, \\ g : \langle 0, \infty \rangle \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \sqrt{x}, \\ (g \circ f) : (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, (g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}. \end{array} \right]$.

(b) $f(x) = \sqrt{x}, g(x) = \frac{x+1}{x-1}$.

$\left[\begin{array}{l} A = \langle 0, 1 \rangle \cup (1, \infty), B = (-\infty, 1) \cup (1, \infty), \\ f : \langle 0, 1 \rangle \cup (1, \infty) \rightarrow (-\infty, 1) \cup (1, \infty), f(x) = \sqrt{x}, \\ g : (-\infty, 1) \cup (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{x+1}{x-1}, \\ (g \circ f) : \langle 0, 1 \rangle \cup (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, (g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}. \end{array} \right]$.

Časť II

1. V nasledujúcich príkladoch nájdite definičný obor funkcie f , keď

(a) $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x-x^2+6}}$ $[(-2, 3)]$.

(b) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x}$ $[(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup \langle 3, \infty \rangle]$.

(c) $f(x) = \sqrt{-2 + \log_3(x-1)}$ $[\langle 10, \infty \rangle]$.

(d) $f(x) = \sqrt{-2 + \log_{\frac{1}{3}}(x-1)}$ $[\langle 1, \frac{10}{9} \rangle]$.

(e) $f(x) = \sqrt{|x-3| - 1}$ $[(-\infty, 2) \cup \langle 3, \infty \rangle]$.

(f) $f(x) = \frac{\sqrt{1+\cot x}}{\cos x}$.
 $[\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{ (k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi) \cup (\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{3\pi}{4} + k\pi) \}]$.

2. V nasledujúcich príkladoch nájdite definičný obor funkcie f a vyšetrite párnosť a nepárnosť funkcie, keď

(a) $f(x) = 1 - \sqrt{2 \cos(2x)}$ $[\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \langle -\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi \rangle]$, párna].

(b) $f(x) = \ln \left(\frac{3+x}{3-x} \right)$ $[(-3, 3)]$ nepárna].

(c) $f(x) = \log \left(\frac{x^2-2}{x} \right)$.
 $[(-\sqrt{2}, 0) \cup (\sqrt{2}, \infty)]$, ani párna, ani nepárna].

(d) $f(x) = \frac{x^3-x}{\sqrt{x^2-1}}$ $[\mathbb{R} \setminus \langle -1, 1 \rangle]$, nepárna].

(e) $f(x) = \sqrt{1 - \operatorname{tg} x}$.
 $[\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \langle -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi \rangle]$, ani párna, ani nepárna].

3. Riešte tieto dve úlohy:

(a) Nájdite inverznú funkciu k funkcii $f(x) = -5 + 3\sqrt{x}$.

$$\left[\begin{array}{l} f : \langle 0, \infty \rangle \rightarrow \langle -5, \infty \rangle \text{ je bijekcia,} \\ f^{-1} : \langle -5, \infty \rangle \rightarrow \langle 0, \infty \rangle, f^{-1}(x) = \left(\frac{x+5}{3} \right)^2. \end{array} \right].$$

(b) Daná je funkcia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x$. Nájdite také dve zúženia s maximálnym $\mathcal{D}(f_i)$, $i = 1, 2$, aby k nim existovali inverzné funkcie. Nájdite ich predpisy a načrtnite grafy danej aj inverznej funkcie v oboch prípadoch.

$$\left[\begin{array}{l} f_1 : (-\infty, 2) \rightarrow \langle -4, \infty \rangle \text{ je bijekcia,} \\ f_1^{-1} : \langle -4, \infty \rangle \rightarrow (-\infty, 2), f_1^{-1}(x) = 2 - \sqrt{4+x}, \\ f_2 : \langle 2, \infty \rangle \rightarrow \langle -4, \infty \rangle \text{ je bijekcia,} \\ f_2^{-1} : \langle -4, \infty \rangle \rightarrow \langle 2, \infty \rangle, f_2^{-1}(x) = 2 + \sqrt{4+x}. \end{array} \right].$$

4. V nasledujúcich príkladoch nájdite definičný obor funkcie f , ak

(a) $f(x) = \arcsin(3x - 5)$ $[\langle \frac{4}{3}, 2 \rangle]$.

- (b) $f(x) = \arcsin \frac{3}{x-2}$ $[(-\infty, -1) \cup \langle 5, \infty \rangle]$.
 (c) $f(x) = \arccos(x^2 - 2x)$ $[\langle 1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2} \rangle]$.
 (d) $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x^2+2x+3}}{x-5}$ $[\mathbb{R} \setminus \{5\}]$.
 (e) $f(x) = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x^2-5x+6}{x^2+x+1}}$ $[(-\infty, 2) \cup \langle 3, \infty \rangle]$.
 (f) $f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{\sqrt{9-x^2}}{|x-1|}$ $[\langle -3, 3 \rangle \setminus \{1\}]$.

5. Dané sú funkcie $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$. Nájdite množiny A a B tak, aby existovala zložená funkcia $g \circ f$ a nájdite jej predpis, ak:

- (a) $f(x) = \ln(5-x)$, $g(x) = 2 + \sqrt{x}$.

$$\left[\begin{array}{l} A = (-\infty, 4), B = \langle 0, \infty \rangle, \\ f : (-\infty, 4) \rightarrow \langle 0, \infty \rangle, f(x) = \ln(5-x), \\ g : \langle 0, \infty \rangle \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 2 + \sqrt{x}, \\ (g \circ f) : (-\infty, 4) \rightarrow \mathbb{R}, (g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2 + \sqrt{\ln(5-x)}. \end{array} \right].$$
- (b) $f(x) = 2 + \sqrt{x}$, $g(x) = \ln(5-x)$.

$$\left[\begin{array}{l} A = \langle 0, 9 \rangle, B = (-\infty, 5), \\ f : \langle 0, 9 \rangle \rightarrow (-\infty, 5), f(x) = 2 + \sqrt{x}, \\ g : (-\infty, 5) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \ln(5-x), \\ (g \circ f) : \langle 0, 9 \rangle \rightarrow \mathbb{R}, (g \circ f)(x) = g(f(x)) = \ln(3 - \sqrt{x}). \end{array} \right].$$

Časť III

1. Nakreslite graf funkcie f , ak

- (a) $f(x) = \sqrt{x}$,
 (b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$,
 (c) $f(x) = 2^x$,
 (d) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$,
 (e) $f(x) = \log_2 x$.

2. V nasledujúcich príkladoch nájdite definičný obor funkcie f , keď

- (a) $f(x) = \sqrt{3 - \log_2(5-x)}$ $[\langle -3, 5 \rangle]$.
 (b) $f(x) = \sqrt{1 - \log_{\frac{1}{2}}(x-3)}$ $[\langle \frac{7}{2}, \infty \rangle]$.
 (c) $f(x) = \log_5 \left(\frac{1+\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}} \right)$ $[\langle 0, 4 \rangle]$.
 (d) $f(x) = \log_3 \left(\frac{2+\sqrt{x}}{2+x-x^2} \right)$ $[\langle 0, 2 \rangle]$.
 (e) $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3+2x-x^2}}{x}$ $[\langle -1, 0 \rangle \cup \langle 0, 3 \rangle]$.
 (f) $f(x) = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x+3}{x-5}}$ $[(-\infty, -3) \cup \langle 5, \infty \rangle]$.

(g) $f(x) = \ln[1 - \log_{10}(x^2 - 5x + 16)]$ $[(2, 3)]$.

3. V nasledujúcich príkladoch nájdite definičný obor funkcie f a vyšetrite párnosť a nepárnosť funkcie, keď

(a) $f(x) = x\sqrt{6 - 2|x|}$ $[-3, 3]$, nepárna].

(b) $f(x) = \ln(5 - |2x - 3|)$ $[-1, 4]$ ani párna, ani nepárna].

(c) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{|3x|}$ $[\mathbb{R} \setminus (-1, 1)]$, párna].

(d) $f(x) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{\ln(1 - x)}$ $[-1, 0) \cup (0, 1]$, ani párna, ani nepárna].

(e) $f(x) = \frac{|x|}{4 - \sqrt{x^2 - 9}}$ $[(-\infty, -3) \cup (3, \infty) \setminus \{-5, 5\}]$, párna].

(f) $f(x) = \sqrt{\operatorname{tg}(2x)}$. .. $[\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (k\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2})]$, ani párna, ani nepárna].

4. Riešte nasledujúce dve úlohy:

(a) Nájdite inverznú funkciu k funkcii $f(x) = 3 + \arcsin(2x + 1)$.

$$\left[\begin{array}{l} f : \langle -1, 0 \rangle \rightarrow \langle 3 - \frac{\pi}{2}, 3 + \frac{\pi}{2} \rangle \text{ je bijekcia,} \\ f^{-1} : \langle 3 - \frac{\pi}{2}, 3 + \frac{\pi}{2} \rangle \rightarrow \langle -1, 0 \rangle, f^{-1}(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin(x - 3). \end{array} \right].$$

(b) Vyšetrite, či funkcia $f : (-\infty, 0) \rightarrow (-\infty, -7)$, $f(x) = -x^2 + 4x - 7$ je bijekcia. Ak áno nájdite k nej inverznú funkciu.

$$\left[\begin{array}{l} \text{Daná funkcia je bijekcia,} \\ f^{-1} : (-\infty, -7) \rightarrow (-\infty, 0), f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{-x - 3}. \end{array} \right].$$

5. Dané sú funkcie $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$. Nájdite množiny A a B tak, aby existovala zložená funkcia $g \circ f$ a nájdite jej predpis, ak:

(a) $f(x) = 6^x$, $g(x) = \sqrt{x - 1}$.

$$\left[\begin{array}{l} A = \langle 0, \infty \rangle, B = \langle 1, \infty \rangle, \\ f : \langle 0, \infty \rangle \rightarrow \langle 1, \infty \rangle, f(x) = 6^x, \\ g : \langle 1, \infty \rangle \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \sqrt{x - 1}, \\ (g \circ f) : \langle 0, \infty \rangle \rightarrow \mathbb{R}, (g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{6^x - 1}. \end{array} \right].$$

(b) $f(x) = \sqrt{x - 1}$, $g(x) = 6^x$.

$$\left[\begin{array}{l} A = \langle 1, \infty \rangle, B = \mathbb{R}, \\ f : \langle 1, \infty \rangle \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x - 1}, \\ g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 6^x, \\ (g \circ f) : \langle 1, \infty \rangle \rightarrow \mathbb{R}, (g \circ f)(x) = g(f(x)) = 6^{\sqrt{x - 1}}. \end{array} \right].$$

Chapter 2

Diferenciálny počet

2.1 Úvodné pojmy.

Definícia 9 *Nech $a \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$. Epsilonovým okolím bodu a nazývame množinu $\mathcal{O}_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Prstencovým epsilonovým okolím bodu a nazývame množinu $\mathcal{O}_\varepsilon^o(a) = \mathcal{O}_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$.*

Množinu $\mathcal{O}_\varepsilon(\infty) = (\frac{1}{\varepsilon}, \infty)$ nazývame ε -ovým okolím bodu ∞ . Prstencové ε -ové okolie $\mathcal{O}_\varepsilon^o(\infty)$ definujeme predpisom $\mathcal{O}_\varepsilon^o(\infty) = \mathcal{O}_\varepsilon(\infty)$. Podobne definujeme epsilonové a prstencové epsilonové okolie mínus nekonečna vzťahom $\mathcal{O}_\varepsilon^o(-\infty) = \mathcal{O}_\varepsilon(-\infty) = (-\infty, -\frac{1}{\varepsilon})$.

Definícia 10 $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$.

Definícia 11 *Nech $A \subseteq \mathbb{R}$ a $a \in \mathbb{R}^*$. Budeme hovoriť, že bod a je hromadným bodom množiny A , ak v každom $\mathcal{O}_\varepsilon^o(a)$ leží bod množiny A .*

2.2 Limita a spojitosť funkcie

Definícia 12 *Nech $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}^*$ a a je hromadným bodom množiny A . Ak pre každé $\mathcal{O}_\varepsilon(b)$ existuje $\mathcal{O}_\delta^o(a)$ také, že $f(\mathcal{O}_\delta^o(a) \cap A) \subset \mathcal{O}_\varepsilon(b)$, hovoríme, že funkcia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ má v bode a limitu b . Píšeme $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$.*

Definícia 13 *Nech $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ a $a \in A$ je hromadným bodom množiny A . Ak $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, budeme hovoriť, že funkcia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá v bode a .*

Ak funkcia f je spojitá v každom bode $a \in C \subset A$, tak budeme hovoriť, že funkcia f je spojitá na množine C .

Ak funkcia f je spojitá v každom bode $a \in A$, tak budeme hovoriť, že funkcia f je spojitá.

Veta 1 *Nech $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ a $g : A \rightarrow \mathbb{R}$. Nech $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b_1 \in \mathbb{R}$ a $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b_2 \in \mathbb{R}$. Potom*

- $\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = b_1 + b_2,$

$$2. \lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = b_1 \cdot b_2,$$

3. ak $b_2 \neq 0$ a aj $g(x) \neq 0$ pre každé $x \in A$, tak

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g} \right) (x) = \frac{b_1}{b_2},$$

$$4. \lim_{x \rightarrow a} |f|(x) = |b_1|.$$

Definícia 14 Nech $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ a $C \subset A$. Potom funkciu $(f|C) : C \rightarrow \mathbb{R}$, $(f|C)(x) = f(x)$ pre každé $x \in C$, nazývame zúženie funkcie f na množine C .

Veta 2 Nech $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $C \subset A$ a $a \in \mathbb{R}^*$ je hromadným bodom množiny C . Nech $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$. Potom aj $\lim_{x \rightarrow a} (f|C)(x) = b$.

Definícia 15 Nech $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ a $a \in \mathbb{R}$. Nech $C = (-\infty, a) \cap A$ a $D = (a, \infty) \cap A$. Ak a je hromadným bodom množiny C , tak $\lim_{x \rightarrow a} (f|C)(x) = \lim_{x \rightarrow a-} f(x)$ nazývame limita funkcie f v bode a zľava.

Podobne, ak a je hromadným bodom množiny D , tak $\lim_{x \rightarrow a} (f|D)(x) = \lim_{x \rightarrow a+} f(x)$ nazývame limita funkcie f v bode a sprava.

Veta 3 Nech $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ a $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$.

Ak $a \in \mathbb{R}$ je hromadný bod množiny $C = (-\infty, a) \cap A$, tak aj $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = b$.

Podobne, ak $a \in \mathbb{R}$ je hromadný bod množiny $D = (a, \infty) \cap A$, potom $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = b$.

Veta 4 Nech $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ a bod $a \in \mathbb{R}$ je hromadný bod množiny $C = (-\infty, a) \cap A$ a aj hromadným bodom množiny $D = (a, \infty) \cap A$. Potom $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existuje práve vtedy, keď $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} f(x)$. V prípade existencie potom platí

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} f(x).$$

Definícia 16 Nech $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ a $a \in A$. Nech $C = (-\infty, a) \cap A$ a $D = (a, \infty) \cap A$.

Ak a je hromadným bodom množiny C a funkcia $(f|C)$ je spojitá v bode a , tak hovoríme, že funkcia f je spojitá v bode a zľava.

Ak a je hromadným bodom množiny D a funkcia $(f|D)$ je spojitá v bode a , tak hovoríme, že funkcia f je spojitá v bode a sprava.

Veta 5 Nech $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ a bod $a \in A$ je hromadný bod množiny $C = (-\infty, a) \cap A$ a aj hromadným bodom množiny $D = (a, \infty) \cap A$. Potom funkcia f je spojitá v bode a práve vtedy, keď je spojitá v bode a sprava aj zľava.

Veta 6 Nech $f : A \rightarrow B \subset \mathbb{R}$ a $g : B \rightarrow \mathbb{R}$. Nech $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ a $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = c$. Nech je splnená aspoň jedna z nasledujúcich podmienok:

- Pre každé $x \in A \setminus \{a\}$ je $f(x) \neq b$.
- Funkcia g je spojitá v bode b .

Potom $\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = c$.

Veta 7 Nech $f : A \rightarrow B \subset \mathbb{R}$ je spojitá v bode a a funkcia $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá v bode $f(a)$. Potom funkcia $(g \circ f) : A \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá v bode a .

Dôsledok 1 Zložená funkcia zo spojitých funkcií je spojitá.

Definícia 17 Nech $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \in \{\infty, -\infty\}$. Potom hovoríme, že funkcia f má v bode a nevlastnú limitu.

Veta 8 Nech $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$. Potom $\lim_{x \rightarrow a} (-f(x)) = -\infty$.

Veta 9 Nech $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ a $g : A \rightarrow \mathbb{R}$. Nech $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ a existuje $k \in \mathbb{R}$ také, že $g(x) \geq k$ pre každé $x \in A$. Potom $\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = \infty$.

Veta 10 Nech $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ a $g : A \rightarrow \mathbb{R}$. Nech $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ a existuje $k \in \mathbb{R}$ také, že $k > 0$ a $g(x) \geq k$ pre každé $x \in A$. Potom $\lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = \infty$.

Veta 11 Nech $\lim_{x \rightarrow a} |f|(x) = \infty$. Potom $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f}(x) = 0$.

Veta 12 Nech $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ a pre každé $x \in A$ je $f(x) > 0$. Potom $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f}(x) = \infty$.

Veta 13 Nech $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ a $h : A \rightarrow \mathbb{R}$. Potom

1. Ak pre každé $x \in A$ je $f(x) \leq g(x)$, tak v prípade existencie vlastných limit $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ a $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$, platí: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$.
2. Ak pre každé $x \in A$ je $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ a $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x)$, tak existuje aj $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ a platí: $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x)$.

Veta 14 Nech funkcia $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá (na intervale $\langle a, b \rangle$.) Potom:

1. Je na intervale $\langle a, b \rangle$ ohraničená.
2. Nadobúda na intervale $\langle a, b \rangle$ minimum a aj maximum. To znamená, že existujú $c, C \in \langle a, b \rangle$ také, že pre každé $x \in \langle a, b \rangle$ platí $f(c) \leq f(x) \leq f(C)$.
3. Ak $f(a) \cdot f(b) < 0$, potom existuje $c \in (a, b)$ také, že $f(c) = 0$,

Dôsledok 2 (Veta o medzihodnotách) Nech I je interval a $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkcia. Nech $a, b \in I$ sú ľubovoľné a $d \in \mathbb{R}$ je také, že $\min\{f(a), f(b)\} \leq d \leq \max\{f(a), f(b)\}$. Potom existuje $c \in \langle \min\{a, b\}, \max\{a, b\} \rangle$ také, že $f(c) = d$.

2.2.1 Príklady

Časť I

1. Vypočítajte limity v nasledujúcich príkladoch:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}{x^2 + 2x - 3}. \dots\dots\dots [-\frac{3}{2}].$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sqrt{x+4} - 2}{\sin(2x)} + \ln(1 - x^2) \right]. \dots\dots\dots [\frac{1}{8}].$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(5x)}{\operatorname{tg}(6x)}. \dots\dots\dots [\frac{5}{6}].$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-2} \right)^{2x-1}. \dots\dots\dots [e^6].$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3-2x}{2+5x} \right)^{\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}}. \dots\dots\dots [\sqrt{\frac{3}{2}}].$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow \infty} (-4x^5 + 5x^3 - 7x + 10). \dots\dots\dots [-\infty].$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow -\infty} (-4x^5 + 5x^3 - 7x + 10). \dots\dots\dots [\infty].$$

$$(h) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x - 5}{2x^3 - 4x + 1}. \dots\dots\dots [0].$$

$$(i) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^3 - 2x^2 + 7}{7x^3 - 3x^2 - 6x + 9}. \dots\dots\dots [\frac{4}{7}].$$

$$(j) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 - 3x^2 + 2x - 1}{2x^3 - x^2 + x - 1}. \dots\dots\dots [\infty].$$

$$(k) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|}{\sqrt{x^2 - 1}}. \dots\dots\dots [1].$$

$$(l) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|x|}{\sqrt{x^2 - 1}}. \dots\dots\dots [1].$$

$$(m) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x|}{\sqrt{x^2 - 1}}. \dots\dots\dots [\infty].$$

$$(n) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{|x|}{\sqrt{x^2 - 1}}. \dots\dots\dots [\infty].$$

$$(o) \lim_{x \rightarrow 0} (2^{\cot x} - 1). \dots\dots\dots [\text{Neexistuje}].$$

$$(p) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (2^{\cot x} - 1). \dots\dots\dots [1].$$

$$(q) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (2^{\cot x} - 1). \dots\dots\dots [0].$$

$$(r) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{\ln x}}. \dots\dots\dots [e^{-1}].$$

$$2. \text{ Nech } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{pre } x < 0, \\ -\frac{1}{x} \cos x & \text{pre } x > 0. \end{cases}$$

$$\text{Vypočítajte } \lim_{x \rightarrow 0} f(x). \dots\dots\dots [-\infty].$$

3. Nech $f(x) = \frac{x+5}{x-3}$. Vypočítajte

$$(a) \lim_{x \rightarrow \infty} f(x). \dots\dots\dots [1],$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x). \dots\dots\dots [1],$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x). \dots\dots\dots [\infty],$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x). \dots\dots\dots [-\infty].$$

Načrtnite graf funkcie.

4. Je funkcia $f(x)$ v bode a spojitá?

$$(a) \quad a = 1, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-1}{1-x} & \text{pre } x \neq 1, \\ -3 & \text{pre } x = 1. \end{cases}$$

$[\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -3 = f(1), \text{ teda je v bode } a \text{ spojitá}].$

$$(b) \quad a = 0, \quad f(x) = \begin{cases} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x} & \text{pre } x < 0, \\ 0 & \text{pre } x = 0, \\ \frac{1-\cos x}{x^2} & \text{pre } x > 0. \end{cases}$$

$[\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ neexistuje, teda nie je v bode } a \text{ spojitá}].$

5. Nájdite parameter p tak, aby funkcia $f(x)$ bola v bode a spojitá:

$$(a) \quad a = 2, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-4x^2+x+6}{-x^2+3x-2} & \text{pre } x \neq 2, \\ p & \text{pre } x = 2. \end{cases} \dots\dots\dots [p = 3].$$

$$(b) \quad a = 0, \quad f(x) = \begin{cases} p \left(\frac{\sin(2x)}{x} \right) & \text{pre } x < 0, \\ \frac{8-x}{p} & \text{pre } x \geq 0. \end{cases} \dots\dots\dots [p \in \{-2, 2\}].$$

$$(c) \quad a = 1, \quad f(x) = \begin{cases} 2x + \frac{p}{2} & \text{pre } x \leq 1, \\ -x + \frac{5p}{4} & \text{pre } x > 1. \end{cases}$$

Potom načrtnite graf funkcie. $\dots\dots\dots [p = 4].$

Časť II

1. Vypočítajte limity v nasledujúcich príkladoch:

$$(a) \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3+3x^2+3x+2}{x^2+x-2}. \dots\dots\dots [-1].$$

$$(b) \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x-8}{\sqrt{x-1}-\sqrt{3}}. \dots\dots\dots [4\sqrt{3}].$$

$$(c) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2+3x-4}. \dots\dots\dots \left[\frac{1}{5}\right].$$

$$(d) \quad \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x-1}{x^2+3x-4}. \dots\dots\dots [\text{Neexistuje}].$$

$$(e) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (1 - 3x + 7x^2 - 4x^3). \dots\dots\dots [-\infty].$$

$$(f) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+1}{5x^3-3x^2+x+2}. \dots\dots\dots [0].$$

$$(g) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^3-3x^2+x+2}{2x^2+1}. \dots\dots\dots [-\infty].$$

$$(h) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5x^4+2x-3}{10x^4-4x^3+1}. \dots\dots\dots \left[-\frac{1}{2}\right].$$

$$(i) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x [\ln(x+1) - \ln x]. \dots\dots\dots [1].$$

$$(j) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x-2} \right)^{2x-1}. \dots\dots\dots [e^3].$$

2. Nech $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-3} & \text{pre } x < 3, \\ (x-3)^2 \sin \frac{1}{x-3} & \text{pre } x > 3. \end{cases}$
 Vypočítajte $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ [Neexistuje].

3. Nech $f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{tg}(3x)}{x} & \text{pre } x < 0, \\ 3 \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) & \text{pre } x > 0. \end{cases}$
 Vypočítajte $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ [3].

4. Vypočítajte limity funkcie $f(x)$ v ∞ , $-\infty$ a v bodoch, v ktorých $f(x)$ nie je definovaná. Potom načrtnite graf, ak:

(a) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 7x + 10}$.

$$\left[\begin{array}{ll} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0, & \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \\ \lim_{x \rightarrow -2+} f(x) = \infty, & \lim_{x \rightarrow -2-} f(x) = -\infty, \\ \lim_{x \rightarrow -5+} f(x) = -\infty, & \lim_{x \rightarrow -5-} f(x) = \infty \end{array} \right].$$

(b) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$.

$$\left[\begin{array}{ll} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0, & \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \\ \lim_{x \rightarrow -2+} f(x) = \infty, & \lim_{x \rightarrow -2-} f(x) = -\infty, \\ \lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \infty, & \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = -\infty \end{array} \right].$$

(c) $f(x) = \frac{x^2 - x^3}{|x-1|}$.

$$\left[\begin{array}{ll} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty, & \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty, \\ \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = -1, & \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = 1, \end{array} \right].$$

5. Je funkcia $f(x)$ v bode a spojitá?

(a) $a = 2$, $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 + 6x - 20}{x^3 - 3x^2 + 2x} & \text{pre } x \neq 2, \\ 7 & \text{pre } x = 2. \end{cases}$

$[\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 7 = f(2)$, teda je v bode 2 spojitá].

(b) $a = 4$, $f(x) = \begin{cases} \frac{2x-8}{\sqrt{x-1}-\sqrt{3}} & \text{pre } x \neq 4, \\ 2 & \text{pre } x = 4. \end{cases}$

$[\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 4\sqrt{3} \neq f(4) = 2$, teda nie je v bode 4 spojitá].

(c) $a = 0$, $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(2x)}{x \cos(3x)} & \text{pre } x \neq 0, \\ \frac{x+2}{x^2+1} & \text{pre } x = 0. \end{cases}$

$[\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 2$, teda je v bode 0 spojitá].

(d) $a = 1$, $f(x) = \begin{cases} (x-1) \cos \frac{1}{x-1} & \text{pre } x < 1, \\ 2x^2 - 1 & \text{pre } x \geq 1. \end{cases}$

$[\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ neexistuje, teda nie je v 1 spojitá].

$$(e) a = 0, \quad f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{pre } x \leq 0, \\ \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} & \text{pre } x > 0. \end{cases}$$

$[\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ neexistuje, teda nie je v 0 spojitá].

6. Nájdite parameter p tak, aby funkcia $f(x)$ bola v bode a spojitá:

$$(a) a = 0, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(5x)}{2x} & \text{pre } x \neq 0, \\ p & \text{pre } x = 0. \end{cases} \dots\dots\dots [p = \frac{5}{2}].$$

$$(b) a = 0, \quad f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{pre } x \neq 0, \\ p & \text{pre } x = 0. \end{cases} \dots\dots\dots [p \text{ neexistuje}].$$

7. Nájdite parameter p tak, aby funkcia $f(x)$ bola v bode a spojitá a potom načrtnite graf funkcie:

$$(a) a = 3, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} & \text{pre } x \neq 3, \\ p & \text{pre } x = 3. \end{cases} \dots\dots\dots [p = 1].$$

$$(b) a = 1, \quad f(x) = \begin{cases} px^2 & \text{pre } x \leq 1, \\ \frac{6}{p} - \frac{px}{2} & \text{pre } x > 1. \end{cases} \dots\dots\dots [p = \pm 2].$$

$$(c) a = -2, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{|x+2|}x & \text{pre } x \neq -2, \\ p & \text{pre } x = -2. \end{cases} \dots\dots\dots [p \text{ neexistuje}].$$

8. Dá sa funkcia $f(x)$ dodefinovať v bode a tak, aby bola v ňom spojitá? (V prípade kladnej odpovede napíšte je predpis!)

$$(a) a = 1, \quad f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + x - 2}. \quad \dots\dots \left[f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + x - 2} & \text{pre } x \neq 1, \\ \frac{4}{3} & \text{pre } x = 1. \end{cases} \right].$$

$$(b) a = 2, \quad f(x) = \frac{x}{x-2}. \quad \dots [\lim_{x \rightarrow 2} \text{ neexistuje, nedá sa dodefinovať}].$$

$$(c) a = 0, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(6x)}{\sin(2x)} & \text{pre } x < 0, \\ \frac{x+9}{x+3} & \text{pre } x > 0. \end{cases} \dots\dots\dots [\text{áno, } f(0) = 3].$$

Časť III

1. Vypočítajte limity v nasledujúcich príkladoch:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^2 - x - 2}. \quad \dots\dots\dots [1].$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 6x^2 + 9x}{x^2 - 2x - 3}. \quad \dots\dots\dots [0].$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1 - \sqrt{x+3}}{x+2}. \quad \dots\dots\dots [-\frac{1}{2}].$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 5x}{\sqrt{x-1} - 2}. \quad \dots\dots\dots [20].$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow \infty} (2 + 3x^2 + 7x^3 - 4x^5). \quad \dots\dots\dots [-\infty].$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - 2x + 5}{4x^3 + 5x^2 - 3} \dots\dots\dots [0].$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5x^4 + x^2 + 7x + 3}{x^2 - 2x + 1} \dots\dots\dots [-\infty].$$

$$(h) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2+x-3x^2-4x^3}{5x^3-2x+1} \dots\dots\dots [-\frac{4}{5}].$$

$$(i) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{2x+2} \dots\dots\dots [e^2].$$

$$2. \text{ Nech } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - \pi x}{x - \pi} & \text{pre } x < \pi, \\ (x \sin(\frac{3\pi}{2} - x)) & \text{pre } x > \pi. \end{cases}$$

$$\text{Vypočítajte } \lim_{x \rightarrow \pi} f(x) \dots\dots\dots [\pi].$$

3. Vypočítajte limity funkcie $f(x)$ v ∞ , $-\infty$ a v bodoch, v ktorých $f(x)$ nie je definovaná. Potom načrtnite graf, ak:

$$(a) f(x) = \frac{3}{2+x}.$$

$$\left[\begin{array}{ll} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0, & \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \\ \lim_{x \rightarrow -2+} f(x) = \infty, & \lim_{x \rightarrow -2-} f(x) = -\infty \end{array} \right].$$

$$(b) f(x) = \frac{-x}{x^2-9}.$$

$$\left[\begin{array}{ll} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0, & \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \\ \lim_{x \rightarrow 3+} f(x) = -\infty, & \lim_{x \rightarrow 3-} f(x) = \infty, \\ \lim_{x \rightarrow -3+} f(x) = -\infty, & \lim_{x \rightarrow -3-} f(x) = \infty \end{array} \right].$$

$$(c) f(x) = \frac{3-x}{x^2-2x-3}.$$

$$\left[\begin{array}{ll} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0, & \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \\ \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -\frac{1}{4}, & \lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = -\infty, \\ \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = \infty, & \end{array} \right].$$

4. Je funkcia $f(x)$ v bode a spojitá?

$$(a) a = 2, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-8}{x-2} & \text{pre } x \neq 2, \\ 4 & \text{pre } x = 2. \end{cases}$$

$$[\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 12 \neq f(2), \text{ teda nie je v bode 2 spojitá}].$$

$$(b) a = \pi, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{(2x)^2 - 4\pi x}{\pi - x} & \text{pre } x < \pi, \\ 4x \sin(x - \frac{3\pi}{2}) & \text{pre } x \geq \pi. \end{cases}$$

$$[\lim_{x \rightarrow \pi} f(x) = -4\pi = f(\pi), \text{ teda je v bode } \pi \text{ spojitá}].$$

$$(c) a = 1, \quad f(x) = \begin{cases} (x-1) \operatorname{arccotg} \frac{1}{x-1} & \text{pre } x < 1, \\ \pi & \text{pre } x = 1, \\ \frac{\sin(\pi x)}{x} & \text{pre } x > 1, \end{cases}$$

$$[\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0 \neq f(1) = \pi, \text{ teda nie je v bode 1 spojitá}].$$

5. Nájdite parameter p tak, aby funkcia $f(x)$ bola v bode a spojitá:

$$(a) \quad a = 5, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{(x-3)^2-4}{x-5} & \text{pre } x \neq 5, \\ p & \text{pre } x = 5. \end{cases} \dots\dots\dots [p = 4].$$

$$(b) \quad a = 1, \quad f(x) = \begin{cases} p^2x & \text{pre } x < 1, \\ p \operatorname{tg} \frac{\pi x}{4} & \text{pre } x \geq 1. \end{cases} \dots\dots\dots [p \in \{0, 1\}].$$

$$(c) \quad a = 4, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x}{4p} - 1 & \text{pre } x \leq 4, \\ \frac{2x^2-8x}{x-4} & \text{pre } x > 4. \end{cases} \dots\dots\dots [p = \frac{1}{9}].$$

6. Nájdite parameter p tak, aby funkcia $f(x)$ bola v bode a spojitá a potom načrtnite graf funkcie:

$$(a) \quad a = 0, \quad f(x) = \begin{cases} e^{px} & \text{pre } x < 0, \\ p - x & \text{pre } x \geq 0. \end{cases} \dots\dots\dots [p = 1].$$

$$(b) \quad a = 2, \quad f(x) = \begin{cases} x + p & \text{pre } x < 2, \\ -2 & \text{pre } x = 2, \\ \frac{p}{x} & \text{pre } x > 2. \end{cases} \dots\dots\dots [p = -4].$$

7. Zistite, či k funkcii $f : (-\infty, -1) \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = \frac{2x}{1-x^2}$ existuje inverzná funkcia, ak áno, nájdite ju.

$$\left[\begin{array}{l} f : (-\infty, -1) \rightarrow (0, \infty) \text{ je bijekcia,} \\ f^{-1} : (0, \infty) \rightarrow (-\infty, -1), f^{-1}(x) = \frac{-1-\sqrt{1+x^2}}{x}. \end{array} \right].$$

2.3 Postupnosti

Definícia 18 *Postupnosť (reálnych čísel) je funkcia $f : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{R}$. Hodnotu $f(n) = a_n$ nazývame n -tý člen postupnosti. V tomto prípade postupnosť zapisujeme v tvare $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.*

Ak existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R}$, tak hovoríme, že postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je konvergentná. Vo zvyšných prípadoch hovoríme, že postupnosť je divergentná.

Veta 15 *Postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je konvergentná a $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ práve vtedy, keď pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ také že pre každé $n > n_0$, $n \in \mathbb{N}^+$ platí*

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

Definícia 19 *Nech $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť reálnych čísel. Ak pre každé $n \in \mathbb{N}^+$ je*

- $a_n < a_{n+1}$, tak hovoríme, že postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je rýdzo rastúca;
- $a_n \leq a_{n+1}$, tak hovoríme, že postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je rastúca;
- $a_n > a_{n+1}$, tak hovoríme, že postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je rýdzo klesajúca;
- $a_n \geq a_{n+1}$, tak hovoríme, že postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je klesajúca.

Uvedené postupnosti sa nazývajú monotónne postupnosti.

Veta 16 Každá rastúca zhora ohraničená postupnosť je konvergentná.

Definícia 20 Nech $f : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{N}^+$, $f(k) = n_k$ je rýdzo rastúca postupnosť prirodzených čísel a $g : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $g(n) = a_n$ je postupnosť reálnych čísel. Potom zloženú funkciu (ktorá je tiež postupnosťou) $g \circ f : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $(g \circ f)(k) = g(f(k)) = g(n_k) = a_{n_k}$ nazývame vybranú postupnosť z postupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ pomocou postupnosti $(n_k)_{k=1}^{\infty}$

Veta 17 Nech $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. potom pre každú jej vybranú postupnosť $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ platí $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$.

Veta 18 (Bolzano-Cauchyho kritérium konvergenzie postupnosti) Postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je konvergentná práve vtedy, keď pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ také že pre každé $m, n > n_0$, $m, n \in \mathbb{N}^+$ platí

$$|a_n - a_m| < \varepsilon.$$

2.3.1 Príklady

Časť I

- Pomocou definície limity postupnosti dokážte, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-3}{n+1} = 2$, a nájdite príslušné n_0 , ak $\varepsilon = \frac{1}{1000}$ [$n_0 = 4999$].
- Nájdite n -tý člen postupnosti $\{0, 9; 0, 99; 0, 999; \dots\}$ a vypočítajte jej limitu. [$a_n = 1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$].
- Zistite, či sú postupnosti konvergentné
 - $\{1 + \cos(n\pi)\}_{n=1}^{\infty}$ [Divergentná].
 - $\left\{\frac{1+2+3+\dots+n}{n+2} - \frac{n}{2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ [Konverguje k $-\frac{1}{2}$].
- Vypočítajte limitu postupnosti, ak
 - $\left\{\left(3 - \frac{1}{n}\right) \sqrt{\frac{n}{4n+1}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ [$\frac{3}{2}$].
 - $\left\{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4n}\right)^{2n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ [0].
 - $\left\{\sqrt{n^2+4} - \sqrt{n^2-4}\right\}_{n=2}^{\infty}$ [0].

Časť II

- Pomocou definície limity postupnosti dokážte, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n+1} = 1$, nájdite príslušné n_0 , ak $\varepsilon = \frac{1}{10}$ [$n_0 = 19$].
- Vypočítajte limitu postupnosti, ak:

- (a) $a_n = \sqrt{1+n^2} - n$ [0].
 (b) $a_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ $[\frac{1}{2}]$.
 (c) $a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2}$ $[\frac{1}{2}]$.
 (d) $a_n = (1 + \frac{1}{4n})^{1-3n}$ $[e^{-\frac{3}{4}}]$.

2.4 Nekonečné rady

Definícia 21 Nech $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť reálnych čísel. Potom symbol

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

nazývame nekonečný číselný rad. Číslo a_n nazývame n -tý člen radu.

K radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je priradená taká postupnosť $(s_n)_{n=1}^{\infty}$, že platí

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

pre každé $n \in \mathbb{N}^+$. Postupnosť $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ nazývame postupnosť čiastočných súčtov radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Ak postupnosť $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ je konvergentná, tak hovoríme, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentný. Ak je divergentná, tak aj rad je divergentný.

Definícia 22 Nech sú dané rady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Potom rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$$

nazývame súčtom radov $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Ak $c \in \mathbb{R}$, tak rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} (ca_n)$$

nazývame súčin radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a konštanty c .

Veta 19 Nech rad $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ je súčtom radov $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Nech tieto rady sú konvergentné a platí $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s_1$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = s_2$. Potom aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ je konvergentný a platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = s_1 + s_2.$$

Nech $c \in \mathbb{R}$ a $c \neq 0$. Potom rad $\sum_{n=1}^{\infty} (ca_n)$ je konvergentný práve vtedy, keď je konvergentný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. V prípade konverencie, ak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$, tak

$$\sum_{n=1}^{\infty} (ca_n) = cs = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Definícia 23 Rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} + \dots$$

nazývame geometrický rad. Číslo q nazývame kvocient geometrického radu.

Veta 20 Geometrický rad $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ je konvergentný práve vtedy, keď $|q| < 1$. V prípade konverencie platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} + \dots = \frac{1}{1-q}.$$

Veta 21 (Bolzano-Cauchyho kritérium konverencie nekonečného radu) Rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentný práve vtedy, keď pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ také že pre každé $m > n > n_0$, $m, n \in \mathbb{N}^+$ platí

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_m| < \varepsilon.$$

Veta 22 (Nutná podmienka konverencie nekonečného radu) Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentný, tak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Definícia 24 Rad $\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+k}$ nazývame zvyšok radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ po k -tom člene.

Veta 23 Rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentný práve vtedy, keď je konvergentný jeho zvyšok

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+k}$$

po (ľubovoľnom) k -tom člene.

Definícia 25 Nech rady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sú také, že $|a_n| \leq b_n$ pre každé $n \in \mathbb{N}^+$. (Je zrejmé, že $0 \leq b_n$.) Potom hovoríme, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je majorantným radom radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Píšeme

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ll \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Veta 24 Nech

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ll \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je konvergentný, tak je konvergentný aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Dôsledok 3 *Nech*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ll \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je divergentný, tak je divergentný aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Definícia 26 *Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ je konvergentný, tak hovoríme, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je absolútne konvergentný.*

Poznámka 1 *Pretože $|a_n| \leq |a_n|$, je zrejmé, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ je majorantným radom radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Z toho už vyplýva, ak daný rad je absolútne konvergentný, tak je aj konvergentný. Tvrdenie neplatí v opačnom slede.*

Veta 25 (*d'Alembertovo kritérium konvergenzie radu*) *Nech $a_n \neq 0$ pre každé $n \in \mathbb{N}^+$. Ak*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1,$$

potom je rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolútne konvergentný.

Ak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1,$$

tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je divergentný.

Veta 26 (*Cauchyho kritérium konvergenzie radu*) *Nech*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1.$$

Potom je rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolútne konvergentný.

Ak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1,$$

tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je divergentný.

Definícia 27 *Nech $a_n > 0$ pre každé $n \in \mathbb{N}^+$. Potom rad*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{n+1} a_n + \dots$$

nazývame radom so striedavým znamienkom.

Veta 27 (*Leibnitzovo kritérium konvergenzie radu*) *Nech $a_n > 0$ pre každé $n \in \mathbb{N}^+$ a postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je klesajúca. Ak $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ je konvergentný.*

Definícia 28 *Rad*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n + \dots$$

nazývame mocninovým radom. Číslo $a \in \mathbb{R}$ sa nazýva stred radu. Čísla a_n sa nazývajú koeficienty mocninového radu.

Veta 28 Pre každý mocninový rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ existuje $0 \leq \rho \leq \infty$ také, že daný rad konverguje pre každé $x \in (a - \rho, a + \rho)$ a diverguje pre každé $x \in (-\infty, a) \cup (a, \infty)$. Hodnotu ρ nazývame polomer konvergencie mocninového radu.

Daný mocninový rad konverguje len pre $x = a$ práve vtedy, keď $\rho = 0$. Rad konverguje pre každé $x \in \mathbb{R}$ práve vtedy, keď $\rho = \infty$.

2.4.1 Príklady

Časť I

1. Pomocou definície nájdite súčet radu

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+4)}$ $[\frac{13}{36}]$.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - \sqrt[n+1]{n+1})$ $[0]$.

2. Vyšetrite konvergenciu geometrického radu

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{5^n}$ [Konverguje, $s = \frac{5}{6}$].

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\frac{3}{2})^n$ [Diverguje].

3. Vyšetrite konvergenciu nasledujúcich radov:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{3n-2}\right)^{2n}$ [Konverguje].

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^{n+1}}$ [Diverguje].

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n^2+3n}$ [Diverguje].

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{1}{n}$ [Diverguje].

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \left(\pi \cdot \left(\frac{1}{n} + n\right)\right)$ [Konverguje].

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{2^{n+2}}$ [Konverguje].

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3n}{n^3+5n^2+2n+1}$ [Diverguje].

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^3+2n+5}$ [Konverguje].

4. V nasledujúcich príkladoch nájdite množinu všetkých čísel, pre ktoré dané rady konvergujú:

- (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n(n+3)}} \cdot (x-4)^n$ $[\langle 2, 6 \rangle]$.
- (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \cdot x^n$ $[\langle -1, 1 \rangle]$.
- (c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n(n+3)}} \cdot (x-4)^{2n}$ $[(4 - \sqrt{2}, 4 + \sqrt{2})]$.
- (d) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n \cdot (x+1)^n$ $[x \in \{-1\}]$.

Časť II

1. Pomocou definície nájdite súčet radu

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+4n+3}$ $[\frac{5}{6}]$.
- (b) $\sum_{n=1}^{\infty} (e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n+2}})$ $[e + \sqrt{e} - 2]$.
- (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + \frac{1}{n})$ [Diverguje].

2. Nájdite súčet radu:

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n+2}{3^{n-1}}$ $[\frac{9}{4}]$.
- (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3+5(-1)^{n+1}}{4^n}$ $[0]$.

3. Vyšetrite konvergenciu nasledujúcich radov:

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$ [Konverguje].
- (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{2n+5}\right)^{2n}$ [Konverguje].
- (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{n+3}\right)^{3n}$ [Diverguje].
- (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{2^n \cdot n!}$ [Konverguje].
- (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$ [Diverguje].
- (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3n}{3^n}$ [Konverguje].
- (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2}\right)^2 \sin \frac{\pi}{2^n}$ [Konverguje].

- (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$ [Diverguje].
- (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{n}} \sin \frac{\pi}{5n}$ [Konverguje].
- (j) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4n}$ [Diverguje].
- (k) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4^n}$ [Konverguje].
- (l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+4}{n^5+4n^2+2}$ [Konverguje].
- (m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4+5}{n^5+3n^4+1}$ [Diverguje].
- (n) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2\sqrt{n}}$ [Konverguje].

4. V nasledujúcich príkladoch nájdite všetky $x \in \mathbb{R}$, pre ktoré dané rady konvergujú a určte polomer konvergenencie:

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[3]{n}} \cdot (x-3)^n$ [$x \in \langle 2, 4 \rangle$, $\rho = 1$].
- (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot (x-1)^n$ [$x \in \mathbb{R}$, $\rho = \infty$].
- (c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n+1} \cdot (x-4)^n$ [$x \in \langle \frac{11}{3}, \frac{13}{3} \rangle$, $\rho = \frac{1}{3}$].
- (d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)5^n} \cdot (x+3)^n$ [$x \in \langle -8, 2 \rangle$, $\rho = 5$].
- (e) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot (x-2)^{2n}$ [$x \in (0, 4)$, $\rho = 2$].

Časť III

1. Pomocou definície nájdite súčet radu:

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+5n+6}$ [$\frac{1}{3}$].
- (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+2n}$ [$\frac{3}{2}$].
- (c) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$ [Diverguje].

2. Nájdite súčet radu:

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+4}}{5^{n-1}}$ [$\frac{25}{6}$].

$$(b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{6+4(-1)^{n+1}}{3^n}. \dots\dots\dots [6].$$

3. Vyšetrite konvergenciu nasledujúcich radov:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{5^n}. \dots\dots\dots [\text{Konverguje}].$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{\pi}{5^n}. \dots\dots\dots [\text{Konverguje}].$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin \frac{1}{n^3}. \dots\dots\dots [\text{Diverguje}].$$

$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} \text{tg} \frac{\pi}{6^{n+1}}. \dots\dots\dots [\text{Konverguje}].$$

$$(e) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-2}{n+1} \right)^{2n}. \dots\dots\dots [\text{Diverguje}].$$

$$(f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+2)!}. \dots\dots\dots [\text{Konverguje}].$$

$$(g) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2}. \dots\dots\dots [\text{Diverguje}].$$

$$(h) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n-1}}. \dots\dots\dots [\text{Konverguje}].$$

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+2}{n+1} \right)^2. \dots\dots\dots [\text{Diverguje}].$$

$$(j) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2+2n}. \dots\dots\dots [\text{Diverguje}].$$

$$(k) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{n^4+2n^2+3}. \dots\dots\dots [\text{Konverguje}].$$

$$(l) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3}{n^3+2n+1}. \dots\dots\dots [\text{Diverguje}].$$

4. V nasledujúcich príkladoch nájdite všetky $x \in \mathbb{R}$, pre ktoré dané rady konvergujú a určte polomer konvergence:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} 2^n n^2 \cdot (x-1)^n. \dots\dots\dots [x \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}), \rho = \frac{1}{2}].$$

$$(b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n!} \cdot (x-2)^n. \dots\dots\dots [x \in \mathbb{R}, \rho = \infty].$$

$$(c) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+5)7^n} \cdot x^n. \dots\dots\dots [x \in \langle -7, 7 \rangle, \rho = 7].$$

2.5 Diferencovateľnosť funkcie

Definícia 29 *Nech $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ a $a \in A$ je hromadným bodom množiny A . Nech existuje vlastná limita*

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a).$$

Vtedy hovoríme, že funkcia f je diferencovateľná v bode a . Hodnotu $f'(a)$ nazývame derivácia funkcie f v bode a .

Ak funkcia f je diferencovateľná v každom bode $a \in M \subseteq A$, potom hovoríme, že funkcia f je diferencovateľná na množine M . Ak funkcia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ je diferencovateľná na množine A , tak hovoríme, že f je diferencovateľná funkcia.

Definícia 30 *Nech $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ a $A_1 = \{a \in A \mid \text{existuje } f'(a)\}$. Potom funkciu $f' : A_1 \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f'(x)$ nazývame derivácia funkcie f .*

Ak funkcia $f' : A_1 \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá v bode a , tak hovoríme, že funkcia f je v bode a spojitاً diferencovateľná.

Ak funkcia $f' : A_1 \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitاً diferencovateľná v každom bode množiny $M \subseteq A_1$, tak hovoríme, že je spojitاً diferencovateľná na množine M .

Ak $A_1 = A$ a funkcia f je spojitاً diferencovateľná na množine A , tak zjednodušene hovoríme, že funkcia f je spojitاً diferencovateľná funkcia.

Veta 29 *Nech $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ je diferencovateľná v bode $a \in A$. Potom existuje taká funkcia $p : A \rightarrow \mathbb{R}$, že:*

1. $p(a) = 0$,
2. funkcia $p : A \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá v bode a . To znamená, že $\lim_{x \rightarrow a} p(x) = p(a) = 0$,
3. pre každé $x \in A$ platí

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + p(x)(x - a).$$

Veta 30 *(Nutná podmienka diferencovateľnosti funkcie v bode) Nech $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ je diferencovateľná v bode $a \in A$. Potom je v tomto bode spojitاً.*

Veta 31 *Nech funkcie $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ a $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ sú diferencovateľné v bode $a \in A$. Potom*

- Funkcia $(f + g) : A \rightarrow \mathbb{R}$ je diferencovateľná v bode a a platí

$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a).$$

- Funkcia $(f \cdot g) : A \rightarrow \mathbb{R}$ je diferencovateľná v bode a a platí

$$(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

- Funkcia $\left(\frac{f}{g}\right) : A \rightarrow \mathbb{R}$ je diferencovateľná v bode a a platí

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)},$$

za predpokladu, že funkcia $\left(\frac{f}{g}\right) : A \rightarrow \mathbb{R}$ je na množine A definovaná, a teda aj $g(a) \neq 0$.

Veta 32 (Veta o diferencovateľnosti zloženej funkcie) Nech funkcia $f : A \rightarrow B \subset \mathbb{R}$ je diferencovateľná v bode $a \in A$ a funkcia $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ je diferencovateľná v bode $f(a) \in B$. Potom zložená funkcia $(g \circ f) : A \rightarrow \mathbb{R}$ je diferencovateľná v bode a a platí

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a) = ((g' \circ f)(a))f'(a) = ((g' \circ f) \cdot f')(a).$$

Veta 33 Nech I je interval a funkcia $f : I \rightarrow J$ je spojitá bijekcia, ktorá je diferencovateľná v bode $a \in I$. Nech $f'(a) \neq 0$. Potom jej inverzná funkcia $f^{-1} : J \rightarrow I$ je diferencovateľná v bode $b = f(a)$ a platí

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} = \frac{1}{(f' \circ f^{-1})(b)}.$$

Definícia 31 Nech je daný mocninový rad

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n + \dots$$

Potom hovoríme, že rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n(x-a)^{n-1} = a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + \dots + n a_n(x-a)^{n-1} + \dots$$

vznikol z daného mocninového radu derivovaním člen po člene.

Veta 34 Nech ρ je polomerom konvergencie mocninového radu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$. Nech pre každé $x \in (a - \rho, a + \rho)$ platí

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n + \dots = s(x).$$

Potom ρ je polomerom konvergencie aj radu $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n(x-a)^{n-1}$ a pre každé $x \in (a - \rho, a + \rho)$ platí

$$a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + \dots + n a_n(x-a)^{n-1} + \dots = s'(x).$$

2.6 Priebeh funkcie

2.6.1 Lokálne extrémym

Definícia 32 *Nech $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ a $a \in A$.*

Nech existuje také prstencové okolie $\mathcal{O}_\delta^o(a)$, že:

1. *Pre každé $x \in \mathcal{O}_\delta^o(a) \cap A$ je $f(x) < f(a)$. Potom hovoríme, že funkcia f má v bode a rýdze lokálne maximum.*
2. *Pre každé $x \in \mathcal{O}_\delta^o(a) \cap A$ je $f(x) > f(a)$. Potom hovoríme, že funkcia f má v bode a rýdze lokálne minimum.*

Nech existuje také okolie $\mathcal{O}_\delta(a)$, že:

1. *Pre každé $x \in \mathcal{O}_\delta(a) \cap A$ je $f(x) \leq f(a)$. Potom hovoríme, že funkcia f má v bode a lokálne maximum.*
2. *Pre každé $x \in \mathcal{O}_\delta(a) \cap A$ je $f(x) \geq f(a)$. Potom hovoríme, že funkcia f má v bode a lokálne minimum.*

Všetky uvedené pojmy nazývame spoločným termínom lokálne extrémym.

Definícia 33 *Nech I je ľubovoľný interval s koncovými bodmi a, b . Potom vnútrom intervalu I nazývame interval $\text{Int}(I) = (a, b) \subseteq I$.*

Veta 35 *(Nutná podmienka pre existenciu lokálneho extrémym) Nech A je interval a $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Nech*

1. *$a \in \text{Int}(A)$ je bod z vnútra intervalu A .*
2. *Funkcia f je diferencovateľná v bode a .*
3. *Funkcia f má v bode a lokálny extrém.*

Potom $f'(a) = 0$.

2.6.2 Intervalové vlastnosti funkcií

Veta 36 *(Rolleho veta) Nech je daná funkcia $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, o ktorej platí:*

1. *Je spojitá (na uzavretom intervale $\langle a, b \rangle$).*
2. *Je diferencovateľná na otvorenom intervale (a, b) .*
3. *$f(a) = f(b)$.*

Potom existuje $c \in (a, b)$ také, že $f'(c) = 0$.

Veta 37 *(Lagrangeova veta) Nech je daná funkcia $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, o ktorej platí:*

1. *Je spojitá (na uzavretom intervale $\langle a, b \rangle$).*

2. Je diferencovateľná na otvorenom intervale (a, b) .

Potom existuje $c \in (a, b)$ také, že

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Dôsledok 4 Nech I je interval a $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ je diferencovateľná funkcia. Nech pre každé $x \in I$ je $f'(x) = 0$. Potom existuje $c \in \mathbb{R}$ také, že $f(x) = c$ pre každé $x \in I$.

Veta 38 (Cauchyho veta) Nech sú dané funkcie $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ a $g : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, o ktorých platí:

1. Sú spojité (na uzavretom intervale $\langle a, b \rangle$).
2. Sú diferencovateľné na otvorenom intervale (a, b) .
3. $g'(x) \neq 0$ pre každé $x \in (a, b)$.

Potom existuje $c \in (a, b)$ také, že

$$\left(\frac{f'}{g'}\right)(c) = \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Veta 39 (l'Hospitalovo pravidlo) Nech sú dané také funkcie $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ a $g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, že o nich platí:

1. Sú diferencovateľné (na intervale (a, b)).
2. $g(x) \neq 0$ a $g'(x) \neq 0$ pre každé $x \in (a, b)$.
3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$.

Ak za týchto predpokladov existuje $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f'}{g'}\right)(x) = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f'(x)}{g'(x)}\right)$, tak existuje aj

$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$ a platí

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f'}{g'}\right)(x) = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f'(x)}{g'(x)}\right) = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right).$$

Poznámka 2 Veta platí v tom istom znení, keď v nej tretej podmienku $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ nahradíme podmienkou $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$.

2.6.3 Príklady

Časť I

1. Zderivujte funkciu $f(x) = \sin(\cos 2x)$ $[(\cos(\cos 2x))(-\sin 2x)2]$.
2. Pomocou definície vypočítajte deriváciu funkcie $f(x)$ v bode a , ak:

- (a) $a = 2$, $f(x) = \frac{1}{x}$ $[f'(2) = -\frac{1}{4}]$.
 (b) $a = 1$, $f(x) = \sqrt{|x-1|}$ $[f'(1) \text{ neexistuje}]$.
3. Nájdite rovnicu dotyčnice a normály ku grafu funkcie $f(x) = e^{-x} \cos 2x$ v bode $A = (0, ?)$ $[A = (0, 1), t : x + y - 1 = 0, n : x - y + 1 = 0]$.
4. Nájdite rovnice dotyčnic k hyperbole $7x^2 - 2y^2 = 14$, ktoré sú kolmé na priamku $p : 2x + 4y - 3 = 0$.
 $[t_1 : 2x - y - 1 = 0, t_2 : 2x - y + 1 = 0]$.
5. V nasledujúcich príkladoch vypočítajte limity (aj s použitím L' Hospitalovho pravidla):

- (a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctg x}{\ln \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}$ $[-1]$.
 (b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\sin 3x)}{\ln(\sin 5x)}$ $[1]$.
 (c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2} \cdot \tg\left(\frac{\pi x}{4}\right)$ $[-\frac{4}{\pi}]$.
 (d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\ln \frac{1}{x}\right)^x$ $[1]$.

6. Vyšetrite spojitost funkcie

$$f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \ln x \cdot \log_{10}(1-x) & \text{pre } x \in (0, 1), \\ 0 & \text{pre } x = 1, \\ x^{\frac{1}{x-1}} & \text{pre } x \in (1, \infty) \end{cases}$$

v bode 1.

$$\left[\begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = e. \text{ Funkcia } f \text{ nemôže byť spojitá} \\ \text{v bode 1, lebo } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ neexistuje, a teda sa nerovná } f(1). \end{array} \right].$$

Časť II

1. Zderivujte funkciu $f(x)$, ak:

- (a) $f(x) = \ln \sqrt{\cos x}$ $\left[\frac{-\sin x}{2 \cos x}\right]$.
 (b) $f(x) = 2^{\tg x}$ $\left[2^{\tg x} \frac{\ln 2}{\cos^2 x}\right]$.
 (c) $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ $\left[x^{\frac{1}{x}-2} (1 - \ln x)\right]$.
 (d) $f(x) = \operatorname{arccotg}^3(\sqrt{x})$ $\left[-\frac{3 \operatorname{arccotg}^2(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}(1+x)}\right]$.
 (e) $f(x) = \arcsin\left(\frac{\ln x}{2}\right)$ $\left[\frac{1}{x\sqrt{4-\ln^2 x}}\right]$.
 (f) $f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{x}{1+x^2}$ $\left[\frac{x^2-1}{x^2+(1+x^2)^2}\right]$.
 (g) $f(x) = 10^{\sqrt{x}} x$ $\left[10^{\sqrt{x}} \left(1 + \frac{\ln 10 \sqrt{x}}{2}\right)\right]$.

(h) $f(x) = (\ln x)^x$ $[(\ln x)^x (\ln \ln x + \frac{1}{\ln x})]$.

2. Pomocou definície vypočítajte deriváciu funkcie $f(x)$ v bode a , ak:

(a) $a = 2$, $f(x) = |3x - 6|$ [neexistuje].

(b) $a = 4$, $f(x) = \sqrt[3]{x+4}$ $[\frac{1}{12}]$.

(c) $a = 0$, $f(x) = \begin{cases} x \sin x & \text{pre } x \leq 0, \\ x^2 & \text{pre } x > 0. \end{cases}$ [0].

3. Zistite, či je funkcia

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x} & \text{pre } x \neq 0, \\ 0 & \text{pre } x = 0 \end{cases}$$

(a) spojitá v bode $a = 0$,

(b) diferencovateľná v bode $a = 0$.

$$\left[\begin{array}{l} \text{a) Je spojitá v bode } a = 0, \\ \text{b) Nie je diferencovateľná v bode } 0. \end{array} \right].$$

4. Nájdite rovnicu dotyčnice a normály ku grafu funkcie $f(x)$ v bode A , ak

$$f(x) = \frac{3x-4}{2x-3}, \quad A = (2, ?).$$

$$[A = (2, 2), \quad t : x + y - 4 = 0, \quad n : x - y = 0].$$

5. Nájdite rovnicu dotyčnice a normály ku grafu funkcie $f : f(x) = e^{1-x^2}$, ktorá prechádza priesečníkom grafu funkcie s priamkou $y = 1$.

$$\left[\begin{array}{l} \text{Priesečníky } A_1 = (1, 1), \quad A_2 = (-1, 1) \\ t_1 : 2x + y - 3 = 0, \quad n_1 : x - 2y + 1 = 0 \\ t_2 : 2x - y + 3 = 0, \quad n_2 : x + 2y - 1 = 0 \end{array} \right].$$

6. Nájdite rovnicu dotyčnice t a normály n ku grafu funkcie $f(x) = x^2 - 2x + 3$, ak dotyčnica t je rovnobežná s priamkou $p : 3x - y + 5 = 0$.

$$[t : 12x - 4y - 13 = 0, \quad n : 4x + 12y - 61 = 0].$$

7. Zistite, v ktorom bode je dotyčnica ku grafu funkcie $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ rovnobežná s osou o_x $[(e, \frac{1}{e})]$.

8. Nájdite rovnicu dotyčnice a normály ku grafu funkcie $f(x) = \ln x$, ak dotyčnica je kolmá na priamku $p : x + 2y - 2 = 0$.

$$[t : y - 2x + 1 + \ln 2 = 0, \quad n : 4y + 2x - 1 + 4 \ln 2 = 0].$$

9. V nasledujúcich príkladoch vypočítajte limity (aj s použitím L' Hospitalovho pravidla):

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{\arcsin x - x}$ [-1].

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$ [2].

(c) $\lim_{x \rightarrow 0+} (e^x - 1) \cotg x$ [1].

- (d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\operatorname{tg} x)^{\sin x}$ [1].
 (e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$ [1].
 (f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x\right)^x$ $\left[e^{-\frac{2}{\pi}}\right]$.
 (g) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right)$ $\left[\frac{1}{2}\right]$.
 (h) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right)$ $\left[\frac{1}{2}\right]$.
 (i) $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{\sin x}{\sin 3}\right)^{\operatorname{cotg}(x-3)}$ $\left[e^{\operatorname{cotg} 3}\right]$.

10. Vyšetrite spojitost funkcie

$$f: \left\langle -\frac{\pi}{2}, 1 \right\rangle \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sin x} & \text{pre } x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, 0 \right\rangle, \\ 0 & \text{pre } x = 0, \\ x^2 \ln x & \text{pre } x \in (0, 1). \end{cases}$$

[Funkcia nie je spojitá v bode 0].

11. Vypočítajte deriváciu funkcie $f(x)$ v bode 0, ak:

- (a) $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x^2}, & x \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \end{cases}$ [0].
 (b) $f(x) = \begin{cases} x^2 \ln x, & x > 0 \\ x^3, & x \leq 0 \end{cases}$ [0].

12. Zistite, či funkcia

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1} & \text{pre } x \neq 0, \\ \frac{1}{2} & \text{pre } x = 0 \end{cases}$$

je spojitá a vypočítajte $f'(0)$.

[Funkcia je spojitá, $f'(0) = -\frac{1}{12}$].

Časť III

1. Zderivujte funkciu $f(x)$, ak:

- (a) $f(x) = \frac{\cos^2 x}{\sqrt[5]{x}}$ $\left[\frac{(-\sin 2x) \sqrt[5]{x} - \frac{\cos^2 x}{5 \sqrt[5]{x^4}}}{\sqrt[5]{x^2}}\right]$.
 (b) $f(x) = 3^{\operatorname{cotg} x} \arcsin x$ $\left[3^{\operatorname{cotg} x} \left(-\frac{(\ln 3) \arcsin x}{\sin^2 x} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)\right]$.
 (c) $f(x) = \log_5(\operatorname{tg} x^3)$ $\left[\frac{3x^2}{(\operatorname{tg} x^3)(\ln 5)(\cos^2 x^3)}\right]$.
 (d) $f(x) = \ln(\operatorname{arctg}(\sqrt{5x}))$ $\left[\frac{5}{2(\operatorname{arctg} \sqrt{5x})(1+5x)\sqrt{5x}}\right]$.

(e) $f(x) = (3x)^{\sin x}$ $[(3x)^{\sin x} ((\cos x)(\ln 3x) + \frac{\sin x}{x})]$.

(f) $f(x) = (\cotg x)^{\arccos x}$.
 $\left[(\cotg x)^{\arccos x} \left(\frac{-\ln(\cotg x)}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{\arccos x}{(\cotg x)(\sin^2 x)} \right) \right]$.

(g) $f(x) = e^{x^3} \operatorname{arccotg} x$ $\left[e^{x^3} \left(3x^2 \operatorname{arccotg} x - \frac{1}{1+x^2} \right) \right]$.

2. Pomocou definície vypočítajte deriváciu funkcie $f(x)$ v bode a , ak:

(a) $a = 2$, $f(x) = \sqrt{4x+1}$ $[f'(2) = \frac{2}{3}]$.

(b) $a = 3$, $f(x) = |x-3|$ $[f'(3) \text{ neexistuje}]$.

3. Zistite, či je funkcia

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 \cos \frac{1}{x-1} & \text{pre } x \neq 1, \\ 0 & \text{pre } x = 1 \end{cases}$$

(a) spojitá v bode $a = 1$,

(b) diferencovateľná v bode $a = 1$.

$$\left[\begin{array}{l} \text{a) Je spojitá v bode } a = 1, \\ \text{b) Je diferencovateľná v bode } a = 1 \text{ a } f'(1) = 0. \end{array} \right]$$

4. Nájdite rovnicu dotyčnice t a normály n ku grafu funkcie $f(x) = x^2 - 3x + 5$, ak t je rovnobežná s priamkou $p: x - y + 1 = 0$.

$$[A = (2, 3), t: x - y + 1 = 0, n: x + y - 5 = 0].$$

5. Nájdite rovnicu dotyčnice a normály ku grafu funkcie $f(x) = \operatorname{tg} x$ v bode $A = (\frac{\pi}{4}, ?)$.

$$[A = (\frac{\pi}{4}, 1), t: y = 2x + 1 - \frac{\pi}{2}, n: y = -\frac{x}{2} + 1 + \frac{\pi}{8}].$$

6. Nájdite rovnicu dotyčnice t a normály n ku grafu funkcie $f(x) = \ln(x-2)$, ak dotyčnica t je kolmá na priamku $p: x + y = 0$.

$$[A = (3, 0), t: y = x - 3, n: y = -x + 3].$$

7. V nasledujúcich príkladoch vypočítajte limity (aj s použitím L' Hospitalovho pravidla):

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$ $[\frac{1}{3}]$.

(b) $\lim_{x \rightarrow 1^-} (x-1) \ln(1-x)$ $[0]$.

(c) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x - \frac{1}{\cos x})$ $[0]$.

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\sin x}$ $[1]$.

(e) $\lim_{x \rightarrow 0} (e^{2x} + x)^{\frac{1}{x}}$ $[e^3]$.

(f) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$ $[\frac{1}{2}]$.

8. Daná je funkcia

$$f : \left(\frac{2\pi}{5}, \pi \right) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 5x} & \text{pre } x \in \left(\frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{2} \right), \\ \frac{\ln(x - \frac{\pi}{2})}{\operatorname{tg} x} & \text{pre } x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi \right). \end{cases}$$

Vypočítajte $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x)$.

$$\left[\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \frac{5}{3}, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) \text{ neexistuje} \right].$$

9. Zistite, či funkcia $f(x)$ je spojitá v bode $a = 0$, ak:

$$(a) f(x) = \begin{cases} \cotg x - \frac{1}{x} & \text{pre } x \neq 0, \\ 0 & \text{pre } x = 0. \end{cases} \dots\dots\dots [\text{Je}].$$

$$(b) f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{pre } x \leq 0, \\ (\sin x)^x & \text{pre } x > 0. \end{cases}$$

$$[\text{Nie je, } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 \neq f(0) = 3].$$

2.6.4 Monotónnosť

Definícia 34 *Nech I je interval a $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Nech pre každé $x_1, x_2 \in I$ také, že $x_1 < x_2$ je*

1. $f(x_1) < f(x_2)$. Potom hovoríme, že f je rýdzo rastúca funkcia.
2. $f(x_1) > f(x_2)$. Potom hovoríme, že f je rýdzo klesajúca funkcia.
3. $f(x_1) \leq f(x_2)$. Potom hovoríme, že f je rastúca funkcia.
4. $f(x_1) \geq f(x_2)$. Potom hovoríme, že f je klesajúca funkcia.

Všetky uvedené funkcie nazývame monotónne funkcie. Funkcie uvedené v prvých dvoch bodoch sa nazývajú rýdzo monotónne funkcie.

Definícia 35 *Nech je daná funkcia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ a interval $I \subset A$. Ak zúženie $f|_I : I \rightarrow \mathbb{R}$ je rýdzo rastúca (rýdzo klesajúca, rastúca, klesajúca) funkcia, tak budeme hovoriť, že funkcia f je rýdzo rastúca (rýdzo klesajúca, rastúca, klesajúca) na intervale I .*

Veta 40 *Nech I je interval a je daná funkcia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Nech*

1. *Funkcia f je spojitá na intervale I .*
2. *Funkcia f je diferencovateľná na vnútri $\operatorname{Int}(I)$ intervalu I .*
3. *Pre každé $x \in \operatorname{Int}(I)$ je $f'(x) \geq 0$.*

Potom je $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ rastúca funkcia (na celom intervale I).

Veta 41 *Nech I je interval a je daná funkcia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Nech*

1. *Funkcia f je spojitá na intervale I .*
2. *Funkcia f je diferencovateľná na vnútri $\text{Int}(I)$ intervalu I .*
3. *Pre každé $x \in \text{Int}(I)$ je $f'(x) \geq 0$.*
4. *Nech neexistuje podinterval $J \subset I$ taký, že $f'(x) = 0$ pre každé $x \in J$.*

Potom je $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ rýdzo rastúca funkcia (na celom intervale I).

2.6.5 Konvexnosť, konkávnosť, inflexný bod

Definícia 36 *Nech I je interval a $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Nech pre každé $x_1, x_2, x_3 \in I$ také, že $x_1 < x_2 < x_3$ platí:*

1. *Bod $(x_2, f(x_2))$ leží pod priamkou určenou bodmi $(x_1, f(x_1))$ a $(x_3, f(x_3))$. Potom hovoríme, že f je rýdzo konvexná funkcia.*
2. *Bod $(x_2, f(x_2))$ leží nad priamkou určenou bodmi $(x_1, f(x_1))$ a $(x_3, f(x_3))$. Potom hovoríme, že f je rýdzo konkávna funkcia.*
3. *Bod $(x_2, f(x_2))$ leží pod, alebo na priamke určenej bodmi $(x_1, f(x_1))$ a $(x_3, f(x_3))$. Potom hovoríme, že f je konvexná funkcia.*
4. *Bod $(x_2, f(x_2))$ leží nad, alebo na priamke určenej bodmi $(x_1, f(x_1))$ a $(x_3, f(x_3))$. Potom hovoríme, že f je konkávna funkcia.*

Definícia 37 *Nech je daná funkcia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ a interval $I \subset A$. Ak zúženie $f|_I : I \rightarrow \mathbb{R}$ je rýdzo konvexná (rýdzo konkávna, konvexná, konkávna) funkcia, tak budeme hovoriť, že funkcia f je rýdzo konvexná (rýdzo konkávna, konvexná, konkávna) na intervale I .*

Veta 42 *Nech I je interval a $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.*

1. *Funkcia f je rýdzo konvexná práve vtedy, keď pre každé $x_1, x_2, x_3 \in I$ také, že $x_1 < x_2 < x_3$ je*

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

2. *Funkcia f je rýdzo konkávna práve vtedy, keď pre každé $x_1, x_2, x_3 \in I$ také, že $x_1 < x_2 < x_3$ je*

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

3. *Funkcia f je konvexná práve vtedy, keď pre každé $x_1, x_2, x_3 \in I$ také, že $x_1 < x_2 < x_3$ je*

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

4. Funkcia f je konkávna práve vtedy, keď pre každé $x_1, x_2, x_3 \in I$ také, že $x_1 < x_2 < x_3$ je

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Veta 43 Nech I je interval a je daná funkcia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Nech

1. Funkcia f je spojitá na intervale I .
2. Funkcia f je diferencovateľná na vnútri $\text{Int}(I)$ intervalu I .
3. Nech $f' : \text{Int}(I) \rightarrow \mathbb{R}$ je rýdzo rastúca (rýdzo klesajúca, rastúca, klesajúca)

Potom $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ je rýdzo konvexná (rýdzo konkávna, konvexná, konkávna) funkcia (na celom intervale I).

Veta 44 Nech I je interval a je daná funkcia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Nech

1. Funkcia f je spojitá na intervale I .
2. Funkcia f je dva razy diferencovateľná na vnútri $\text{Int}(I)$ intervalu I .
3. Nech $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$, $f''(x) \geq 0$, $f''(x) \leq 0$) pre každé $x \in \text{Int}(I)$.

Potom $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ je rýdzo konvexná (rýdzo konkávna, konvexná, konkávna) funkcia (na celom intervale I).

Veta 45 Nech I je interval a je daná funkcia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Nech

1. Funkcia f je spojitá na intervale I .
2. Funkcia f je dva razy diferencovateľná na vnútri $\text{Int}(I)$ intervalu I .
3. Nech $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$) pre každé $x \in \text{Int}(I)$.
4. Nech neexistuje podinterval $J \subset I$ taký, že $f''(x) = 0$ pre každé $x \in J$.

Potom $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ je rýdzo konvexná (rýdzo konkávna) funkcia (na celom intervale I).

Definícia 38 Nech I je interval a $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ je funkcia, ktorá je diferencovateľná v bode $a \in \text{Int}(I)$. Nech existuje také okolie $\mathcal{O}_\delta(a) \subset \text{Int}(I)$, že je splnená jedna z nasledujúcich podmienok

1. Funkcia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ je na intervale $(a - \delta, a)$ rýdzo konvexná a na intervale $(a, a + \delta)$ rýdzo konkávna.
2. Funkcia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ je na intervale $(a - \delta, a)$ rýdzo konkávna a na intervale $(a, a + \delta)$ rýdzo konvexná.

Potom hovoríme, že funkcia f má v bode a inflexný bod.

Veta 46 Nech I je interval, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ je diferencovateľná funkcia a $a \in \text{Int}(I)$ je jej inflexný bod. Ak je f v bode a dva razy diferencovateľná, tak $f''(a) = 0$.

Veta 47 (Taylorova veta) Nech n je prirodzené číslo a funkcia $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ je

1. n -razy spojito diferencovateľná (na intervale $\langle a, b \rangle$),
2. $(n + 1)$ -razy diferencovateľná na (a, b) ,

Potom existuje $c \in (a, b)$ také, že

$$f(b) - f(a) = \frac{f'(a)}{1!} (b - a) + \frac{f''(a)}{2!} (b - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (b - a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n + 1)!} (b - a)^{n+1}.$$

2.6.6 Príklady

Časť I

Vyšetrite priebeh funkcie $f(x)$, ak:

1. $f(x) = \frac{2x^3}{x^2+1}$.

$$\left[\begin{array}{l} \mathcal{D}(f) = \mathbb{R}, \text{ nepárna} \\ \nearrow \text{ na} : \mathbb{R} \\ \searrow \text{ na} : - \\ \cup \text{ na} : \langle -\infty, -\sqrt{3} \rangle \text{ a } \langle 0, \sqrt{3} \rangle \\ \cap \text{ na} : \langle -\sqrt{3}, 0 \rangle \text{ a } \langle \sqrt{3}, \infty \rangle \\ \text{ABS} : \text{nemá} \\ \text{ASS} : y = 2x \quad \vee \quad \pm \infty \end{array} \right].$$

2. $f(x) = 16x(x - 1)^3$.

$$\left[\begin{array}{l} \mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \\ \nearrow \text{ na} : \langle \frac{1}{4}, \infty \rangle \\ \searrow \text{ na} : \langle -\infty, \frac{1}{4} \rangle \\ \cup \text{ na} : \langle -\infty, \frac{1}{2} \rangle \text{ a } \langle 1, \infty \rangle \\ \cap \text{ na} : \langle \frac{1}{2}, 1 \rangle \\ \text{ABS} : \text{nemá} \\ \text{ASS} : \text{nemá} \end{array} \right].$$

3. $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

$$\left[\begin{array}{l} \mathcal{D}(f) = (0, \infty) \\ \nearrow \text{ na} : (0, e^2) \\ \searrow \text{ na} : (e^2, \infty) \\ \cup \text{ na} : \langle e^{\frac{8}{3}}, \infty \rangle \\ \cap \text{ na} : (0, e^{\frac{8}{3}}) \\ \text{ABS} : x = 0 \\ \text{ASS} : y = 0 \quad \vee \quad \infty \end{array} \right].$$

4. $f(x) = \ln(4 - x^2)$.

$$\left[\begin{array}{l} \mathcal{D}(f) = (-2, 2), \text{ párna} \\ \nearrow \text{ na} : (-2, 0) \\ \searrow \text{ na} : (0, 2) \\ \cup \text{ na} : - \\ \cap \text{ na} : (-2, 2) \\ \text{ABS} : x = -2, x = 2, \\ \text{ASS} : \text{nemá} \end{array} \right].$$

5. $f(x) = x - 2\arctg x$.

$$\left[\begin{array}{l} \mathcal{D}(f) = \mathbb{R}, \text{ nepárna} \\ \nearrow \text{ na} : (-\infty, -1) \text{ a } (1, \infty) \\ \searrow \text{ na} : (-1, 1) \\ \cup \text{ na} : (0, \infty) \\ \cap \text{ na} : (-\infty, 0) \\ \text{ABS} : \text{nemá}, \\ \text{ASS} : y = x - \pi \text{ v } \infty, y = x + \pi \text{ v } -\infty \end{array} \right].$$

6. $f(x) = \arcsin(\sin x)$.

$$\left[\begin{array}{l} \mathcal{D}(f) = \mathbb{R}, \text{ nepárna, periodická s periódou } 2\pi \\ \nearrow \text{ na} : \langle (2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2} \rangle, k \in \mathbb{Z} \\ \searrow \text{ na} : \langle (2k+1)\frac{\pi}{2}, (2k+3)\frac{\pi}{2} \rangle, k \in \mathbb{Z} \\ \cup \text{ na} : - \\ \cap \text{ na} : - \\ \text{ABS} : \text{nemá}, \\ \text{ASS} : \text{nemá} \end{array} \right].$$

7. $f(x) = \frac{x^4}{(1+x)^3}$.

$$\left[\begin{array}{l} \mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\} \\ \nearrow \text{ na} : (-\infty, -4) \text{ a } (0, \infty) \\ \searrow \text{ na} : (-4, -1) \text{ a } (-1, 0) \\ \cup \text{ na} : (-1, \infty) \\ \cap \text{ na} : (-\infty, -1) \\ \text{ABS} : x = -1, \\ \text{ASS} : y = x - 3 \text{ v } \pm \infty \end{array} \right].$$

Časť II

Vyšetrite priebeh funkcie $f(x)$, ak:

1. $f(x) = \frac{10x}{(x+2)^2}$.

$$\left[\begin{array}{l} \mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2\} \\ \nearrow \text{na} : (-2, 2) \\ \searrow \text{na} : (-\infty, -2) \text{ a } (2, \infty) \\ \cup \text{na} : (4, \infty) \\ \cap \text{na} : (-\infty, -2) \text{ a } (-2, 4) \\ \text{ABS} : x = -2 \\ \text{ASS} : y = 0 \text{ v } \pm \infty \end{array} \right].$$

$$2. f(x) = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2.$$

$$\left[\begin{array}{l} \mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\} \\ \nearrow \text{na} : (-\infty, -1) \text{ a } (1, \infty) \\ \searrow \text{na} : (-1, 1) \\ \cup \text{na} : (-\infty, -1) \text{ a } (-1, 2) \\ \cap \text{na} : (2, \infty) \\ \text{ABS} : x = -1 \\ \text{ASS} : y = 1 \text{ v } \pm \infty \end{array} \right].$$

$$3. f(x) = \frac{1+\ln x}{x}.$$

$$\left[\begin{array}{l} \mathcal{D}(f) = (0, \infty) \\ \nearrow \text{na} : (0, 1) \\ \searrow \text{na} : (1, \infty) \\ \cup \text{na} : (\sqrt{e}, \infty) \\ \cap \text{na} : (0, \sqrt{e}) \\ \text{ABS} : x = 0 \\ \text{ASS} : y = 0 \text{ v } \infty \end{array} \right].$$

$$4. f(x) = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}.$$

$$\left[\begin{array}{l} \mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\} \\ \nearrow \text{na} : (-\infty, 1) \text{ a } (5, \infty) \\ \searrow \text{na} : (1, 5) \\ \cup \text{na} : (-1, 1) \text{ a } (1, \infty) \\ \cap \text{na} : (-\infty, -1) \\ \text{ABS} : x = 1 \\ \text{ASS} : y = x + 5 \text{ v } \pm \infty \end{array} \right].$$

$$5. f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}.$$

$$\left[\begin{array}{l} \mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ \nearrow \text{na} : \left(\frac{1}{2}, \infty\right) \\ \searrow \text{na} : (-\infty, 0) \text{ a } \left(0, \frac{1}{2}\right) \\ \cup \text{na} : (-\infty, 0) \text{ a } (0, \infty) \\ \cap \text{na} : - \\ \text{ABS} : x = 0 \\ \text{ASS} : \text{nemá} \end{array} \right].$$

$$6. f(x) = \arcsin\left(\frac{1-x}{1+x}\right).$$

$$\left[\begin{array}{l} \mathcal{D}(f) = \langle 0, \infty \rangle \\ \nearrow \text{na} : - \\ \searrow \text{na} : \langle 0, \infty \rangle \\ \cup \text{na} : \langle 0, \infty \rangle \\ \cap \text{na} : - \\ \text{ABS} : \text{nemá} \\ \text{ASS} : y = -\frac{\pi}{2} \text{ v } \infty \end{array} \right].$$

$$7. f(x) = \frac{2x-1}{(x-1)^2}.$$

$$\left[\begin{array}{l} \mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\} \\ \nearrow \text{na} : \langle 0, 1 \rangle \\ \searrow \text{na} : \langle -\infty, 0 \rangle \text{ a } \langle 1, \infty \rangle \\ \cup \text{na} : \langle -\frac{1}{2}, 1 \rangle \text{ a } \langle 1, \infty \rangle \\ \cap \text{na} : \langle -\infty, -\frac{1}{2} \rangle \\ \text{ABS} : x = 1 \\ \text{ASS} : y = 0 \text{ v } \pm \infty \end{array} \right].$$

$$8. f(x) = \frac{x^3}{2(1+x)^2}.$$

$$\left[\begin{array}{l} \mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\} \\ \nearrow \text{na} : \langle -\infty, -3 \rangle \text{ a } \langle -1, \infty \rangle \\ \searrow \text{na} : \langle -3, -1 \rangle \\ \cup \text{na} : \langle 0, \infty \rangle \\ \cap \text{na} : \langle -\infty, -1 \rangle \text{ a } \langle -1, 0 \rangle \\ \text{ABS} : x = -1 \\ \text{ASS} : y = \frac{x}{2} - 1 \text{ v } \pm \infty \end{array} \right].$$

$$9. f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}.$$

$$\left[\begin{array}{l} \mathcal{D}(f) = \mathbb{R}, \text{ nepárna} \\ \nearrow \text{na} : \langle -1, 1 \rangle \\ \searrow \text{na} : \langle -\infty, -1 \rangle \text{ a } \langle 1, \infty \rangle \\ \cup \text{na} : \langle -\sqrt{3}, 0 \rangle \text{ a } \langle \sqrt{3}, \infty \rangle \\ \cap \text{na} : \langle -\infty, -\sqrt{3} \rangle \text{ a } \langle 0, \sqrt{3} \rangle \\ \text{ABS} : \text{nemá} \\ \text{ASS} : y = 0 \text{ v } \pm \infty \end{array} \right].$$

$$10. f(x) = x \ln(x^2).$$

$$\left[\begin{array}{l} \mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}, \text{ nepárna} \\ \nearrow \text{na} : \langle -\infty, -\frac{1}{e} \rangle \text{ a } \langle \frac{1}{e}, \infty \rangle \\ \searrow \text{na} : \langle \frac{1}{e}, 0 \rangle \text{ a } \langle 0, \frac{1}{e} \rangle \\ \cup \text{na} : \langle 0, \infty \rangle \\ \cap \text{na} : \langle -\infty, 0 \rangle \\ \text{ABS} : \text{nemá} \\ \text{ASS} : \text{nemá} \end{array} \right].$$

11. $f(x) = \cos x + \ln(\cos x)$.

$$\left[\begin{array}{l} \mathcal{D}(f) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), \text{ párna, periodická s periódou } 2\pi \\ \nearrow \text{ na} : \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 0 + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z} \\ \searrow \text{ na} : \left(0 + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z} \\ \bigcup \text{ na} : - \\ \bigcap \text{ na} : \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z} \\ \text{ABS} : x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ASS} : \text{nemá} \end{array} \right].$$

12. $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$.

$$\left[\begin{array}{l} \mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}, \text{ nepárna} \\ \nearrow \text{ na} : - \\ \searrow \text{ na} : (-\infty, 0) \text{ a } (0, \infty) \\ \bigcup \text{ na} : (0, \infty) \\ \bigcap \text{ na} : (-\infty, 0) \\ \text{ABS} : \text{nemá} \\ \text{ASS} : y = 0 \text{ v } \pm \infty \end{array} \right].$$

13. $f(x) = x \operatorname{arctg} x$.

$$\left[\begin{array}{l} \mathcal{D}(f) = \mathbb{R}, \text{ párna} \\ \nearrow \text{ na} : (0, \infty) \\ \searrow \text{ na} : (-\infty, 0) \\ \bigcup \text{ na} : \mathbb{R} \\ \bigcap \text{ na} : - \\ \text{ABS} : \text{nemá} \\ \text{ASS} : y = \frac{\pi x}{2} - 1 \text{ v } \infty, y = -\frac{\pi x}{2} - 1 \text{ v } -\infty \end{array} \right].$$

14. $f(x) = \frac{2}{e^x - 3}$.

$$\left[\begin{array}{l} \mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{\ln 3\} \\ \nearrow \text{ na} : - \\ \searrow \text{ na} : (-\infty, \ln 3) \text{ a } (\ln 3, \infty) \\ \bigcup \text{ na} : (\ln 3, \infty) \\ \bigcap \text{ na} : (-\infty, \ln 3) \\ \text{ABS} : x = \ln 3 \\ \text{ASS} : y = 0 \text{ v } \infty, y = \frac{-2}{3} \text{ v } -\infty \end{array} \right].$$

15. $f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}$.

$$\left[\begin{array}{l} \mathcal{D}(f) = \mathbb{R}, \text{ párna} \\ \nearrow \text{ na} : \langle -1, 0 \rangle \text{ a } \langle 1, \infty \rangle \\ \searrow \text{ na} : \langle -\infty, -1 \rangle \text{ a } \langle 0, 1 \rangle \\ \bigcup \text{ na} : \langle -\infty, -\sqrt{3} \rangle \text{ a } \langle \sqrt{3}, \infty \rangle \\ \bigcap \text{ na} : \langle -\sqrt{3}, -1 \rangle \text{ a } \langle -1, 1 \rangle \text{ a } \langle 1, \sqrt{3} \rangle \\ \text{ABS} : \text{nemá} \\ \text{ASS} : \text{nemá} \end{array} \right].$$

Poznámka 3 f' a f'' neexistujú v bodoch $x = \pm 1$.

Časť III

Vyšetrite priebeh funkcie $f(x)$, ak:

$$1. f(x) = \frac{x^3}{x^2+4}.$$

$$\left[\begin{array}{l} \mathcal{D}(f) = \mathbb{R}, \text{ nepárna} \\ \nearrow \text{ na} : \mathbb{R} \\ \searrow \text{ na} : - \\ \cup \text{ na} : (-\infty, -\sqrt{12}) \text{ a } (0, \sqrt{12}) \\ \cap \text{ na} : (-\sqrt{12}, 0) \text{ a } (\sqrt{12}, \infty) \\ \text{ABS} : \text{nemá} \\ \text{ASS} : y = x \text{ v } \pm \infty \end{array} \right].$$

$$2. f(x) = \frac{x}{x^2+1}.$$

$$\left[\begin{array}{l} \mathcal{D}(f) = \mathbb{R}, \text{ nepárna} \\ \nearrow \text{ na} : \langle -1, 1 \rangle \\ \searrow \text{ na} : (-\infty, -1) \text{ a } (1, \infty) \\ \cup \text{ na} : \langle -\sqrt{3}, 0 \rangle \text{ a } \langle \sqrt{3}, \infty \rangle \\ \cap \text{ na} : (-\infty, -\sqrt{3}) \text{ a } (0, \sqrt{3}) \\ \text{ABS} : \text{nemá} \\ \text{ASS} : y = 0 \text{ v } \pm \infty \end{array} \right].$$

$$3. f(x) = \frac{1}{1-x^2}.$$

$$\left[\begin{array}{l} \mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \text{ párna} \\ \nearrow \text{ na} : \langle 0, 1 \rangle \text{ a } (1, \infty) \\ \searrow \text{ na} : (-\infty, -1) \text{ a } (-1, 0) \\ \cup \text{ na} : (-1, 1) \\ \cap \text{ na} : (-\infty, -1) \text{ a } (1, \infty) \\ \text{ABS} : x = -1, x = 1 \\ \text{ASS} : y = 0 \text{ v } \pm \infty \end{array} \right].$$

$$4. f(x) = \frac{x}{x^2-4}.$$

$$\left[\begin{array}{l} \mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}, \text{ nepárna} \\ \nearrow \text{ na} : - \\ \searrow \text{ na} : (-\infty, -2) \text{ a } (-2, 2) \text{ a } (2, \infty) \\ \cup \text{ na} : (-2, 0) \text{ a } (2, \infty) \\ \cap \text{ na} : (-\infty, -2) \text{ a } (0, 2) \\ \text{ABS} : x = -2, x = 2 \\ \text{ASS} : y = 0 \text{ v } \pm \infty \end{array} \right].$$

$$5. f(x) = \frac{e^x}{x+1}.$$

$$\left[\begin{array}{l} \mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\} \\ \nearrow \text{na} : \langle 0, \infty \rangle \\ \searrow \text{na} : (-\infty, -1) \text{ a } (-1, 0) \\ \cup \text{na} : (-1, \infty) \\ \cap \text{na} : (-\infty, -1) \\ \text{ABS} : x = -1 \\ \text{ASS} : y = 0 \text{ v } -\infty \end{array} \right].$$

6. $f(x) = e^{-x^2}$.

$$\left[\begin{array}{l} \mathcal{D}(f) = \mathbb{R}, \text{ párna} \\ \nearrow \text{na} : (-\infty, 0) \\ \searrow \text{na} : \langle 0, \infty \rangle \\ \cup \text{na} : \left(-\infty, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right) \text{ a } \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right) \\ \cap \text{na} : \left\langle \frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right\rangle \\ \text{ABS} : \text{nemá} \\ \text{ASS} : y = 0 \text{ v } \pm \infty \end{array} \right].$$

7. $f(x) = (1 - 3x)e^{2x}$.

$$\left[\begin{array}{l} \mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \\ \nearrow \text{na} : \left(-\infty, \frac{-1}{6}\right) \\ \searrow \text{na} : \left\langle \frac{-1}{6}, \infty \right\rangle \\ \cup \text{na} : \left(-\infty, \frac{-2}{3}\right) \\ \cap \text{na} : \left\langle \frac{-2}{3}, \infty \right\rangle \\ \text{ABS} : \text{nemá} \\ \text{ASS} : y = 0 \text{ v } -\infty \end{array} \right].$$

8. $f(x) = x \ln x$.

$$\left[\begin{array}{l} \mathcal{D}(f) = (0, \infty) \\ \nearrow \text{na} : \langle e^{-1}, \infty \rangle \\ \searrow \text{na} : (0, e^{-1}) \\ \cup \text{na} : (0, \infty) \\ \cap \text{na} : - \\ \text{ABS} : \text{nemá} \\ \text{ASS} : \text{nemá} \end{array} \right].$$

9. $f(x) = 1 + (x^2 - 1)^3$.

$$\left[\begin{array}{l} \mathcal{D}(f) = \mathbb{R}, \text{ párna} \\ \nearrow \text{na} : \langle 0, \infty \rangle \\ \searrow \text{na} : (-\infty, 0) \\ \cup \text{na} : (-\infty, -1) \text{ a } \left\langle \frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right\rangle; \text{ a } \langle 1, \infty \rangle \\ \cap \text{na} : \left\langle -1, \frac{-1}{\sqrt{5}} \right\rangle; \text{ a } \left\langle \frac{1}{\sqrt{5}}, 1 \right\rangle \\ \text{ABS} : \text{nemá} \\ \text{ASS} : \text{nemá} \end{array} \right].$$

10. $f(x) = \frac{x^2 - 6x + 3}{x - 3}$.

$$\left[\begin{array}{l} \mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{3\} \\ \nearrow \text{na} : (-\infty, 3); \text{ a } (3, \infty) \\ \searrow - \\ \cup \text{na} : (-\infty, 3) \\ \cap \text{na} : (3, \infty) \\ \text{ABS} : x = 3 \\ \text{ASS} : y = x - 3 \quad \vee \quad \pm \infty \end{array} \right].$$

11. $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$.

$$\left[\begin{array}{l} \mathcal{D}(f) = (-1, 1), \text{ nepárna} \\ \nearrow \text{na} : (-1, 1) \\ \searrow - \\ \cup \text{na} : \langle 0, 1 \rangle \\ \cap \text{na} : (-1, 0) \\ \text{ABS} : x = 1, x = -1 \\ \text{ASS} : \text{nemá} \end{array} \right].$$

12. $f(x) = x + 2\operatorname{arccotg} x$.

$$\left[\begin{array}{l} \mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \\ \nearrow \text{na} : (-\infty, -1) \text{ a } (1, \infty) \\ \searrow \text{na} : \langle -1, 1 \rangle \\ \cup \text{na} : \langle 0, \infty \rangle \\ \cap \text{na} : (-\infty, 0) \\ \text{ABS} : \text{nemá} \\ \text{ASS} : y = x \quad \vee \quad \infty, \quad y = x + 2\pi \quad \vee \quad -\infty \end{array} \right].$$

13. $f(x) = xe^x$.

$$\left[\begin{array}{l} \mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \\ \nearrow \text{na} : \langle -1, \infty \rangle \\ \searrow \text{na} : (-\infty, -1) \\ \cup \text{na} : \langle -2, \infty \rangle \\ \cap \text{na} : (-\infty, -2) \\ \text{ABS} : \text{nemá} \\ \text{ASS} : y = 0 \quad \vee \quad -\infty \end{array} \right].$$