

## 1. KOMPLEXNÉ ČÍSLA

- Nájdite výsledok operácie v tvare  $x+yi$ , kde  $x, y \in R$ .
  - $3 + 7i - (5 - 2i)(4 - i)$
  - $i(1+i)(1-i)(1+2i)(1-2i)$
  - $\frac{(1-7i)}{(2+3i)}$
  - $\frac{a+bi}{a-bi}$ ,  $a, b \in R$
  - $\frac{i(2+3i)}{3+5i}$
- Nájdite  $x, y \in R$  také, e
  - $(2x + 3y) + i(x - y) = -1 + 2i$
  - $(ix + y)(2x - 3iy) = 2i$
  - $\frac{-y + ix}{1 - 2i} + \frac{x + iy}{2 + 3i} = 1$
- Dané komplexné číslo znázornite a nájdite jeho gonio-  
metrický tvar.
  - $-5$
  - $1 - i$
  - $\sqrt{3} - i$
  - $-5i$
  - $-2 - 2i$
  - $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$
- Vypočítajte  $zu, \frac{z}{u}, z^n$ .
  - $z = \sqrt{3}(\cos \frac{7\pi}{5} + i \sin \frac{7\pi}{5})$ ,  $u = 2(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})$ ,  
 $n = 5$
  - $z = 3(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$ ,  $u = 6(\cos \frac{3\pi}{8} + i \sin \frac{3\pi}{8})$ ,  
 $n = 2004$
- V obore komplexných čísel riešte rovnicu.
  - $z^4 = 4$
  - $z^4 = -4$
  - $z^3 = -8i$
  - $z^2 = -2 - 2\sqrt{3}i$
  - $z^2 = 2i$
  - $z^2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$
- Vypočítajte.
  - $i^{101}, i^{-39}$
  - $(1+i)^4$
  - $(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2})^8$
  - $(\sqrt{3} - i)^3$
  - $(-1 - \sqrt{3}i)^6$

## Výsledky

- a)  $-15 + 20i$ , b)  $10i$ , c)  $-\frac{19}{13} - \frac{17}{13}i$ ,  
d)  $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} + \frac{2ab}{a^2+b^2}i$ , e)  $\frac{1}{34} + \frac{21}{34}i$
- a)  $x = 1, y = -1$ , b)  $x = \pm 1, y = 0$ , c)  $x = -4$ ,  
 $y = \frac{1}{2}$
- a)  $5(\cos \pi + i \sin \pi)$ , b)  $\sqrt{2}(\cos \frac{7}{4}\pi + i \sin \frac{7}{4}\pi)$ ,  
c)  $2(\cos \frac{11}{6}\pi + i \sin \frac{11}{6}\pi)$ , d)  $5(\cos \frac{3}{2}\pi + i \sin \frac{3}{2}\pi)$ ,  
e)  $2\sqrt{2}(\cos \frac{5}{4}\pi + i \sin \frac{5}{4}\pi)$   
f)  $\cos \frac{4}{3}\pi + i \sin \frac{4}{3}\pi$

- a)  $2\sqrt{3}(\cos \frac{26}{15}\pi + i \sin \frac{26}{15}\pi)$ ,  $\frac{\sqrt{3}}{2}(\cos \frac{16}{15}\pi + i \sin \frac{16}{15}\pi)$ ,  
 $-9\sqrt{3}$   
b)  $18(\cos \frac{5}{8}\pi + i \sin \frac{5}{8}\pi)$ ,  $\frac{1}{2}(\cos \frac{1}{8}\pi - i \sin \frac{1}{8}\pi)$ ,  $-3^{2004}$
- a)  $z_k = \sqrt{2}(\cos k\frac{\pi}{2} + i \sin k\frac{\pi}{2})$ ,  $k = 0, 1, 2, 3$ .  
b)  $z_k = \sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}) + i \sin(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}))$ ,  $k = 0, 1, 2, 3$ .  
c)  $z_k = 2(\cos(\frac{\pi}{2} + k\frac{2\pi}{3}) + i \sin(\frac{\pi}{2} + k\frac{2\pi}{3}))$ ,  $k = 0, 1, 2$ .  
d)  $z_0 = -1 + \sqrt{3}i$ ,  $z_1 = 1 - \sqrt{3}i$ .  
e)  $z_0 = 1 + i$ ,  $z_1 = -1 - i$ .  
f)  $z_0 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}i)$ ,  $z_1 = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{3}i)$ .
- a)  $i$ , b)  $-4$ , c)  $1$ , d)  $8i$ , e)  $64$ .

## 2. POLYNÓMY

- Určte stupeň polynómu  $f(x)$ 
  - $f(x) = 1 + x + ix$
  - $f(x) = 3x + 2 - 5x^3$
  - $f(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$ ,  $n \in N$ .
- Vynásobte a nájdite stupeň súčinu  $f(x) \cdot g(x)$ 
  - $f(x) = x^2 + 1$ ,  $g(x) = x^3 - 1$
  - $f(x) = x^3 + x + 1$ ,  $g(x) = (x - i)$
- Del'te (určte podiel a zvyšok).
  - $(x^4 + 1) : (x - 1)$ ,
  - $(x^3 + x^2 + x + 1) : (x + 1)$
  - $(x^3 + x^2 + x + 1) : (x^2 + 1)$
- Daný polynóm rozložte na súčin mocnín ireducibilných  
polynómov nad  $R$  a nad  $C$ .
  - $2x^2 - x - 1$
  - $2x^2 - x + 1$
  - $3x^3 - x^2 + 3x - 1$
  - $x^4 + 4$
  - $2x^3 - x - 1$
  - $2x^4 - x^3 + 7x^2 - 4x - 4$
  - $4x^5 - 4x^4 - 19x^3 - 13x^2 - 5x - 3$
- Pomocou Hornerovej schémy vypočítajte hodnotu  
 $f(c)$ , ak
  - $f(x) = x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 10x + 16$ ,  $c = 4$
  - $f(x) = 6x^4 - 7x^3 + 4x + 2$ ,  $c = -\frac{1}{3}$
  - $f(x) = x^5 + (1+2i)x^4 - (1+3i)x^2 + 7$ ,  $c = -2 - i$
- Nájdite takú hodnotu parametra  $a$ , že  $c$  bude kore-  
ňom polynómu  $f(x)$ .
  - $f(x) = x^3 + 2x^2 - ax + 2$ ,  $c = 3$
  - $f(x) = 2x^6 - ax^4 - x^3 + ax^2 + 3a$ ,  $c = -1$
- Nájdite násobnosť koreňa  $c$  polynómu  $f(x)$ .
  - $f(x) = x^6 - 4x^5 + 6x^4 - 8x^3 + 10x^2 - 8x + 8$ ,  $c = 2$
  - $f(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$ ,  $c = 2$
  - $f(x) = x^5 + 7x^4 + 16x^3 + 8x^2 - 16x - 16$ ,  $c = -2$
  - $f(x) = x^6 - 2ix^5 - x^4 - x^2 + 2ix + 1$ ,  $c = i$
- Nájdite všetky racionálne korene polynómu
  - $2x^7 - 13x^6 + 6x^5 + 13x^4 - 18x^3 + 29x^2 - 22x + 3$
  - $6x^4 - 11x^3 - x^2 - 4$

- c.  $9x^4 - 21x^3 + x^2 + 9x + 2$   
 d.  $x^5 + x^4 - 6x^3 - 14x^2 - 11x - 3$

9. Nájdite všetky korene polynómu.

- a.  $x^4 - 30x^2 + 289$   
 b.  $x^3 + i$   
 c.  $x^8 - 16$

### Výsledky

1. a) 1, b) 3, c)  $n$   
 2. a)  $x^5 + x^3 - x^2 - 1$ , 5, b)  $x^4 - ix^3 + x^2 + (1-i)x - i$ , 4  
 3. a)  $(x^4 + 1) = (x - 1)(x^3 + x^2 + x + 1) + 2$ , (zv. 2)  
 b)  $(x^3 + x^2 + x + 1) = (x + 1)(x^2 + 1)$ , (zv. 0),  
 c)  $(x^3 + x^2 + x + 1) = (x^2 + 1)(x + 1)$ , (zv. 0)  
 4. Nad  $R$ :  
 a)  $2(x-1)(x+\frac{1}{2})$ , b)  $2x^2 - x + 1$ , c)  $(x^2 + 1)(3x - 1)$ ,  
 d)  $(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)$ , e)  $(2x^2 + 2x + 1)(x - 1)$ ,  
 f)  $2(x-1)(x+\frac{1}{2})(x^2 + 4)$ , g)  $4(x+1)^2(x-3)(x^2 + \frac{1}{4})$   
 nad  $C$ :  
 a)  $2(x-1)(x+\frac{1}{2})$ , b)  $2(x - \frac{1+i\sqrt{7}}{4})(x - \frac{1-i\sqrt{7}}{4})$ ,  
 c)  $(x+i)(x-i)(3x-1)$ ,  
 d)  $(x-1-i)(x-1+i)(x+1-i)(x+1+i)$ ,  
 e)  $2(x-1)(x+\frac{1+i}{2})(x+\frac{1-i}{2})$ ,  
 f)  $2(x-1)(x+\frac{1}{2})(x+2i)(x-2i)$ ,  
 g)  $4(x+1)^2(x-3)(x+\frac{1}{2}i)(x-\frac{1}{2}i)$   
 5. a) 136, b) 1, c)  $-1 - 44i$   
 6. a)  $\frac{47}{3}$ , b)  $-1$   
 7. a) 2, b) 3, c) 4, d) 3,  
 8. a) 1, 1,  $-\frac{3}{2}$ , b)  $-\frac{2}{3}, 2$ , c)  $-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1, 2$ ,  
 d)  $-1, -1, -1, -1, 3$   
 9. a)  $\pm 4 \pm i$ , b)  $i, \pm \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$ , c)  $\pm \sqrt{2}, \pm i\sqrt{2}, \pm 1 \pm i$

### 3. RACIONÁLNE FUNKCIE

1. Napíšte, či je daná funkcia elementárnym zlomkom nad  $R$ .

- a.  $\frac{2x+1}{x^2+5x+6}$   
 b.  $\frac{2x+1}{(x^2+4x+5)^n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$

- c.  $\frac{2x+1}{(x-2)^2}$  d.  $\frac{1}{(x-2)^2}$

2. Rozložte rýdzdo racionálnu funkciu na elementárne zlomky nad  $R$ , nad  $C$ .

- a.  $\frac{x^2 - 6x + 3}{(x+1)(x^2+9)}$  b.  $\frac{2x^2 - 9x + 5}{(x-2)(x^2+x-6)}$   
 c.  $\frac{x^2}{(x-3)^3}$  d.  $\frac{2x+3}{x^2+2x+2}$

3. Danú racionálnu funkciu napíšte v tvare súčtu polynómu a elementárných zlomkov nad  $R$  aj nad  $C$ .

- a.  $\frac{x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + 1}{x^3 + x^2 - 2}$   
 b.  $\frac{x^2 + 2x}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}$   
 c.  $\frac{x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4}{3x^3 - 12x^2 + 12x - 1}$   
 d.  $\frac{x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4}{2x^3 + 7x^2 + 14x + 8}$   
 e.  $\frac{x^4 + 4x^3 + 9x^2 + 5x + 4}{(x^2 + 2x + 2)^2}$   
 f.  $\frac{x^4 + 4x^3 + 9x^2 + 5x + 4}{(x-3)(x^2+2x+2)^2}$   
 g.  $\frac{2x^4 + 4x^3 + 9x^2 + 10x + 8}{(x-2)(x^2+x+2)^2}$

4. Napíšte tvar rozkladu danej racionálnej funkcie na súčet elementárných zlomkov.

- a.  $\frac{f(x)}{(2x+1)^3(x-1)^2(2x^2-2x+1)}$ ,  $\text{st } f(x) = 6$   
 b.  $\frac{x}{(x^2+1)^3(x^2-1)^3}$

### Výsledky

1. a)  $D = 5^2 - 4 \cdot 6 = 1 > 0 \implies$  nie je,  
 b)  $D = -4 < 0$ ,  $\text{st}(2x+1) = 1 \implies$  áno, c) nie je,  
 d) áno  
 2. a)  $(\frac{2}{x+3} - \frac{1}{(x-2)^2})$  - nad  $R$ , nad  $C$ ,  
 b)  $\frac{1}{x+1} - \frac{6}{x^2+9}$  - nad  $R$ ,  $\frac{1}{x+1} + \frac{i}{x-3i} - \frac{i}{x+3i}$  - nad  $C$   
 c)  $\frac{1}{x-3} + \frac{2}{(x-3)^2} + \frac{9}{(x-3)^3}$  - nad  $R$ , nad  $C$   
 d)  $\frac{1+(i/2)}{x+1+i} + \frac{1-(i/2)}{x+1-i}$  nad  $C$

3. a)  $(x+1) + \frac{2}{x-1} + \frac{x+1}{x^2+2x+2} - \text{nad } R$   
 $(x+1) + \frac{2}{x-1} + \frac{(1/2)}{x+1+i} + \frac{(1/2)}{x+1-i} - \text{nad } C$   
 b)  $\frac{-1}{(x+1)^3} + \frac{1}{x+1}$ , c)  $\frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x-2)^2}$   
 d)  $\frac{2}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{2}{x-2}$ , e)  $\frac{2x+3}{x^2+2x+2} + \frac{4x+2}{(x^2+2x+2)^2}$   
 — nad  $R$   
 $\frac{1+(i/2)}{x+1+i} + \frac{i}{(x+1+i)^2} + \frac{1-(i/2)}{x+1-i} + \frac{-i}{(x+1-i)^2} - \text{nad } C$   
 f)  $\frac{1}{x-3} + \frac{x}{(x^2+2x+2)^2}$  g)  $\frac{2}{x-2} - \frac{x}{(x^2+x+2)^2}$
4. a) nad  $R$ :  $\frac{a}{(2x+1)^3} + \frac{b}{(2x+1)^2} + \frac{c}{2x+1} + \frac{d}{(x-1)^2} + \frac{e}{x-1} + \frac{f}{x-(1+i)/2} + \frac{g}{2x^2-2x+1}$ ,  $a, b, c, d, e, f, g \in R$   
 nad  $C$ :  
 $\frac{a}{(2x+1)^3} + \frac{b}{(2x+1)^2} + \frac{c}{2x+1} + \frac{d}{(x-1)^2} + \frac{e}{x-1} + \frac{f}{x-(1+i)/2} + \frac{g}{x-(1-i)/2}$ ,  $a, b, c, d, e, f, g \in C$   
 b) nad  $R$   
 $\frac{ax+b}{(x^2+1)^3} + \frac{cx+d}{(x^2+1)^2} + \frac{ex+f}{x^2+1} + \frac{g}{(x-1)^3} + \frac{h}{(x-1)^2} + \frac{k}{x-1} + \frac{l}{(x+1)^3} + \frac{m}{(x+1)^2} + \frac{n}{x+1}$ ,  $a, b, c, d, e, f, g, h, k, l, m, n \in R$   
 Nad  $C$ :  $\frac{a}{(x+i)^3} + \frac{b}{(x+i)^2} + \frac{c}{x+i} + \frac{d}{(x-i)^3} + \frac{e}{(x-i)^2} + \frac{f}{x-i} + \frac{g}{(x-1)^3} + \frac{h}{(x-1)^2} + \frac{k}{x-1} + \frac{l}{(x+1)^3} + \frac{m}{(x+1)^2} + \frac{n}{x+1}$ ,  
 $a, b, c, d, e, f, g, h, k, l, m, n \in C$

#### 4. SÚSTAVY LINEÁRNYCH ROVNÍČ

1. Riešte systémy lineárnych rovníc.

a.  $x_1 + 2x_2 = -3$     b.  $3x_1 + x_2 + 2x_3 = 11$   
 $3x_2 = -6$                        $-3x_2 + x_3 = -3$   
 $7x_3 = 21$

c.  $3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5$     d.  $2x_1 + x_2 - 3x_3 = -4$   
 $-x_2 + x_3 = i$                        $x_2 - x_3 = 2$   
 $2x_3 = 2 + 2i$

2. Napíšte sústavu lineárnych rovníc a množinu všetkých jej riešení, ak jej rozšírená matica je

a.  $\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right)$     b.  $\left( \begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right)$   
 c.  $\left( \begin{array}{ccc|c} 1+i & 1 & 1 & 1 \\ 0 & i & 2 & i \\ 0 & 0 & 1 & 1+i \end{array} \right)$     d.  $\left( \begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right)$   
 e.  $\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$     f.  $\left( \begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$

3. Rozhodnite, či je daná matica stupňovitá.

a.  $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$     b.  $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$     c.  $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}$

4. Riešte sústavy lineárnych rovníc

a.  $x_1 - x_2 = -2$     b.  $12x_1 - x_2 + 5x_3 = 30$   
 $-3x_1 + 2x_2 = 3$                        $3x_1 - 13x_2 + 2x_3 = 21$   
 $7x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15$

c.  $7x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1$   
 $-x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 2$   
 $-10x_1 + 15x_2 - 11x_3 = 4$

d.  $2x_1 - x_2 - 4x_3 = 1$   
 $x_1 - x_2 + x_3 = 2$   
 $4x_1 - x_2 - 2x_3 = 5$

e.  $3x_1 - x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 2$   
 $3x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 12$   
 $4x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -1$   
 $5x_1 + 4x_2 - 9x_3 = 5$

f.  $2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 6x_4 = 1$   
 $2x_1 + 2x_2 - 6x_3 + 2x_4 = 2$   
 $2x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 3$   
 $-6x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4$

g.  $2x_1 + (2-i)x_2 = 9$   
 $-x_1 + x_2 = i$

h.  $3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 + i$   
 $x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 14 - 3i$   
 $x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 8 - 2i$

5. Riešte dva systémy s rovnakou maticou pomocou eliminácie na matici  $3 \times 5$ .

$x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1$      $x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 9$   
 $2x_1 + 5x_2 + x_3 = 9$      $2x_1 + 5x_2 + x_3 = 9$   
 $x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 9$      $x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -2$

6. Riešte homogénne sústavy lineárnych rovníc

a.  $2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 0$   
 $x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0$   
 $3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$   
 b.  $2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 0$   
 $x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0$   
 $3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$   
 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$

#### Výsledky

1. a)  $(1, -2)$ , b)  $(1, 2, 3)$ , c)  $(-i, 1, 1 + i)$   
 d)  $\{(-3 + a, 2 + a, a) : a \in R\}$   
 2. a)  $\{(2 + p, p, 0, -1) : p \in R\}$ , b)  $\emptyset$ ,  
 c)  $(-1 - 2i, -1 + 2i, 1 + i)$ , d)  $\{(a, -2, 0, -1) : a \in R\}$ ,  
 e)  $\{(1 + b - a, b, 0, a) : a, b \in R\}$ ,  
 f)  $\{(\frac{1+p+q}{2}, 1 - p, p, q) : p, q \in R\}$   
 3. a) áno, b) nie, c) áno

4. a)  $(1, 3)$ , b)  $(2, -1, 1)$ , c)  $(\frac{1}{60}, \frac{83}{180}, \frac{1}{4})$   
 d)  $(\frac{3}{2}, 0, \frac{1}{2})$ , e)  $(0, 2, \frac{1}{3} - \frac{3}{2})$ , f)  $\emptyset$ , g)  $(2, 2 + i)$ ,  
 h)  $(i, -i, 2)$   
 5.  $(-1, 2, 1)$ ,  $(3, 1, -2)$   
 6. a)  $\{a(-2, 4, 1, 5) : a \in R\}$ , b)  $\{(0, 0, 0, 0)\}$

### 5. Maticové operácie

1. Vypočítajte  $2A$ ,  $A + B$ ,  $AB$ ,  $BA$  (ak existujú) pre matice:

a.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

b.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

c.  $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,

d.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,

2. K danej matici nájdite inverznú maticu.

a.  $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$     b.  $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

c.  $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$     d.  $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$

e.  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$     f.  $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

g.  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$     h.  $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

i.  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

j.  $\begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$     k.  $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

### Výsledky

1. a)  $2A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ ,

$A + B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $AB \nexists$ ,  $BA \nexists$

b)  $2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$ ,  $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ ,

$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $BA = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,

c)  $2A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ ,  $AB = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ ,

$A + B \nexists$ ,  $BA \nexists$

d)  $2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $AB = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,

$A + B \nexists$ ,  $BA \nexists$

2. a)  $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ , b)  $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ , c)  $\nexists$ ,

d)  $\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ , e)  $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & -7 & -1 \\ -6 & 8 & 2 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ ,

f)  $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ , g)  $\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ ,

h)  $\begin{pmatrix} 3 & -5 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ , i)  $\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ,

j)  $\begin{pmatrix} -7 & 5 & 12 & -19 \\ 3 & -2 & -5 & 8 \\ 41 & -30 & -69 & 111 \\ -59 & 43 & 99 & -159 \end{pmatrix}$ ,

k)  $\begin{pmatrix} 3 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

### 6. DETERMINANTY

1. Vypočítajte nasledujúce determinanty.

a.  $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$ , b.  $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}$ , c.  $\begin{vmatrix} 2+i & 2 \\ 5 & 5-i \end{vmatrix}$

d.  $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$ , e.  $\begin{vmatrix} a-2 & a+2 \\ b-2 & b+2 \end{vmatrix}$ , f.  $\begin{vmatrix} \sin \alpha & -\cos \alpha \\ \cos \alpha & \sin \alpha \end{vmatrix}$

2. Pre maticu  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

(a) Vypočítajte hodnoty  $\det A_{31}$ ,  $\det A_{32}$ ,  $\det A_{33}$ , kde  $A_{ij}$  je matica, ktorá vznikne z matice  $A$  vynechaním riadku  $R_i$  a stĺpca  $S_j$ .

(b) Vypočítajte hodnoty algebraických doplnkov  $\tilde{a}_{31}$ ,  $\tilde{a}_{32}$ ,  $\tilde{a}_{33}$ .

(c) Pomocou výsledkov z častí a), b) vypočítajte  $\det A$

3. Platí tvrdenie: Ak  $A, B \in C^{3 \times 3}$ , tak  $\det(A + B) = \det A + \det B$ ? Svoje tvrdenie odôvodnite.

4. Napíšte hodnotu determinantu

a.  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ , b.  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 5 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ , c.  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

d.  $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & -3 & 3 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix}$ , e.  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ , f.  $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

5. Vypočítajte determinanty

$$\text{a. } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \end{vmatrix}, \text{ b. } \begin{vmatrix} 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \\ a & b & a & b \\ c & d & c & d \end{vmatrix}, \text{ c. } \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -3 & 4 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

$$\text{d. } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 3 & 1 & -1 & 5 & 1 \\ 5 & -2 & 3 & 6 & 1 \end{vmatrix}, \text{ e. } \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 & -1 \\ 5 & 5 & 5 & -1 & 5 \\ 5 & 5 & -1 & 5 & 5 \\ 5 & -1 & 5 & 5 & 5 \\ -1 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}$$

6. Vypočítajte determinanty matíc stupňa  $n, n > 1$

$$\text{a. } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 3 & 3 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n & n & n \end{vmatrix}$$

$$\text{b. } \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$\text{b. } \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{c. } \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 & 5 & -1 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & -2 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 4 & -5 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{d. } \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{e. } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Zistite aká je dimenzia podpriestoru  $M \subset R^4$  tak, e ho vyjadrite ako lineárny obal lineárne nezávislej množiny.

$$\text{a. } M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4 : x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0\}$$

$$\text{b. } M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4 : x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0, x_3 + x_4 = 0\}.$$

## Výsledky

1. a)  $-4$ , b)  $0$ , c)  $1 + 3i$ , d)  $4$ , e)  $4(a - b)$ , f)  $1$

2. (a)  $11, 1, -4$ , (b)  $11, -1, -4$ , c)  $-3$

3. Nie. Návod na odôvodnenie: nájdite maticu  $A \in C^{3 \times 3}$ , pre ktorú  $\det 2A \neq 2 \det A$ .

4. a)  $0$ , b)  $0$ , c)  $-30$ , d)  $-45$ , e)  $-15$ , f)  $1$ .

5. a)  $0$ , b)  $(ad - bc)^2$ , c)  $-48$ , d)  $-4$ , e)  $19 \times 6^4$

6. a)  $(-1)^{n+1}n$ , b)  $\prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j)$

## 7. LINEÁRNA ZÁVISLOSŤ A NEZÁVISLOSŤ V $C^n$

1. Rozhodnite, či sú nasledujúce podmnožiny  $C^3$  lineárne nezávislé, tie ktoré sú nezávislé doplňte na bázu  $C^3$ .

a.  $\{(1, 1, 1), (1, 1, -1)\}$ ,

b.  $\{(1, 1, 1), (1, 1, -1), (0, 0, 2)\}$ ,

c.  $\{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ ,

2. Zistite, či  $\mathbf{b}$  patrí do linerneho obalu množiny  $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ , ak

a.  $\mathbf{b} = (1, 2, 3)$ ,  $\mathbf{b}_1 = (1, 1, 1)$   
 $\mathbf{b}_2 = (1, 1, -1)$ ,  $\mathbf{b}_3 = (0, 0, 2)\}$ .

b.  $\mathbf{b} = (1, 2, 3)$ ,  $\mathbf{b}_1 = (1, 1, 1)$   
 $\mathbf{b}_2 = (1, 1, 0)$ ,  $\mathbf{b}_3 = (0, 1, 1)\}$ .

c.  $\mathbf{b} = (1, 2, 3)$ ,  $\mathbf{b}_1 = (1, 2, 0)$   
 $\mathbf{b}_2 = (1, 2, -1)$ ,  $\mathbf{b}_3 = (0, 0, 1)\}$ .

3. Určte hodnoty matice:

$$\text{a. } \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix},$$

## Výsledky

1. a) nezávislá, b) zvisl, c) nezávislá

2. a) nepatrí, b) patrí, c) patrí,

3. a)  $2$ , b)  $3$ , c)  $4$ , d)  $3$ , e)  $2$

4a.  $M = \{(-2a + b - c, a, b, c) : a, b, c \in R\} = \text{Lo}\{(-2, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1)\}$ ,  $\dim M = 3$ .

b.  $M = \text{Lo}\{(-2, 1, 0, 0), (-2, 0, -1, 1)\}$ ,  $\dim M = 2$ .

## 8. VEKTORY V 3-ROZMERNOM PRIESTORE.

1. Vypočítajte skalárny súčin  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$  a zistite, či je ich uhol  $\alpha$  ostrý, tupý alebo pravý.

a.  $\mathbf{u} = (1, -1, 2)$ ,  $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$

b.  $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$ ,  $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$

c.  $\mathbf{u} = (2, -2, 1)$ ,  $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$

2. Nájdite ortogonálnu projekciu vektora  $\mathbf{u}$  do smeru vektora  $\mathbf{v}$  a nájdite zložku kolmú na  $\mathbf{v}$ .

a.  $\mathbf{u} = (3, -5, 2)$ ,  $\mathbf{v} = (-3, 0, 4)$ ,

b.  $\mathbf{u} = (-1, 2, 1)$ ,  $\mathbf{v} = (2, 2, 1)$

3. Ukážte, že  $A = (2, -1, 1)$ ,  $B = (3, 2, -1)$  a  $C = (7, 0, -2)$  sú vrcholy pravoúhleho trojuholníka. Pri ktorom vrchole je pravý uhol? Vypočítajte jeho obsah  $P_{ABC}$ .

4. Vypočítajte  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ .

a.  $\mathbf{u} = (1, -2, -1)$ ,  $\mathbf{v} = (0, 1, 1)$ .

b.  $\mathbf{u} = (-2, 1, 3)$ ,  $\mathbf{v} = (4, -2, -6)$

5. Nájdite vektor dĺžky  $1$  kolmý aj na  $\mathbf{u}$  aj na  $\mathbf{v}$ .

a.  $\mathbf{u} = (1, 1, -1)$ ,  $\mathbf{v} = (0, 3, 1)$

b.  $\mathbf{u} = (2, 1, 0)$ ,  $\mathbf{v} = (0, 1, 2)$

6. Nájdite obsah trojuholníka  $ABC$ .

a.  $A = (2, 0, 1)$ ,  $B = (3, -1, 2)$ ,  $C = (-3, 4, 2)$

b.  $A = (1, 3, 2)$ ,  $B = (5, 3, 1)$ ,  $C = (-3, 1, 2)$

7. Nájdite objem rovnobežnostena vytvoreného vektormi  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AC}$ ,  $\vec{AD}$ .
- a)  $A = (-2, 3, 1)$ ,  $B = (1, -2, 3)$ ,  
 $C = (2, 1, 0)$ ,  $D = (3, 2, 1)$
- b)  $A = (-1, 4, 2)$ ,  $B = (2, 3, 4)$ ,  
 $C = (0, 4, 2)$ ,  $D = (3, 6, 3)$
8. Vypočítajte  $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$ , ak
- a.  $\|\mathbf{a}\| = 3$ ,  $\|\mathbf{b}\| = 2$  a uhol medzi  $\mathbf{a}$  a  $\mathbf{b}$  je  $60^\circ$
- b.  $\|\mathbf{a}\| = 5$ ,  $\|\mathbf{b}\| = 8$  a  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 24$
9. Vypočítajte  $\|(3\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - 3\mathbf{b})\|$ , ak
- a.  $\|\mathbf{a}\| = 3$ ,  $\|\mathbf{b}\| = 5$  a uhol medzi  $\mathbf{a}$  a  $\mathbf{b}$  je  $\frac{\pi}{6}$ ,
- b.  $\|\mathbf{a}\| = 2$ ,  $\|\mathbf{b}\| = 3$  a  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -3\sqrt{3}$
- a.  $p: x = 1 + 2t, y = 3 - t, z = -1 - 4t, t \in R$ ;  
 $\rho: 3x + 2y + 5z - 7 = 0$
- b.  $p: x = t, y = 2t, z = 2t, t \in R$ ;  $\rho: 2x + 4y - 5z + 3 = 0$
5. Rozhodnite, či sú priamka  $p$  a rovina  $\rho$  kolmé.
- a.  $p: x = 1 + 2t, y = 3 - t, z = -1 - 4t, t \in R$ ;  
 $\rho: -4x + 2y + 8z + 3 = 0$
- b.  $p: x = 4 + 3t, y = 1 - 2t, z = -1 + 4t, t \in R$ ;  
 $\rho: x - 5y + 2z - 7 = 0$
6. Nájdite parametrické rovnice priamky  $p$ , ktorá je priesečnicou rovín
- a)  $\rho_1: -2x + 3y + 7z + 2 = 0$ ,  $\rho_2: x + 2y - 3z + 5 = 0$
- b)  $\rho_1: 3x - 5y + 2z = 0$ ,  $\rho_2: x + z = 0$
7. Nájdite rovnicu roviny prechádzajúcej cez bod  $(-1, 4, -3)$ , ktorá je kolmá na priamku  $x = 2 + t, y = -3 + 2t, z = -t, t \in R$ .
8. Nájdite rovnicu roviny  $\rho$  prechádzajúcej cez bod  $(-1, 2, 4)$ , ktorá je rovnobežná s rovinou
- a.  $xy$ , b.  $xz$ , c.  $x + y + z + 1 = 0$ .
9. Nájdite rovnicu roviny, prechádzajúcej cez bod  $(-1, 4, 2)$ , ktorá obsahuje priesečnicu rovín  $4x - y + z - 2 = 0$  a  $2x + y - 2z - 3 = 0$ .
10. Nájdite rovnicu roviny, ktorá je rovinou súmernosti bodov  $(2, -1, 1)$  a  $(3, 1, 5)$ .
11. Nájdite priesečník priamok
- a.  $p: x = -1 + 4t, y = 3 + t, z = 1, t \in R$   
 $q: x = -13 + 12t, y = 1 + 6t, z = 2 + 3t, t \in R$ .
- b.  $p: x = -1 + 4t, y = 3 + t, z = 1, t \in R$   
 $q: x = -13 + 12t, y = 1 + 6t, z = 1 + 3t, t \in R$ .

## Výsledky

1. a) 0, pravý, b)  $-1$ , tupý, c) 3, ostrý
2. a)  $P_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = -\frac{1}{25}(-3, 0, 4)$ ,  $(3, -5, 2) + \frac{1}{25}(-3, 0, 4)$ ,  
b)  $P_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \frac{1}{3}(2, 2, 1)$ ,  $(-1, 2, 1) - \frac{1}{3}(2, 2, 1)$ .
3. Pri vrchole  $B$ .  $P_{ABC} = \frac{7\sqrt{6}}{2}$ .
- 4a)  $(-1, -1, 1)$ , b)  $(0, 0, 0)$
- 5a)  $\frac{\pm 1}{\sqrt{26}}(4, -1, 3)$ , b)  $\frac{\pm 1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1)$
- 6a)  $\frac{1}{2}\sqrt{62}$ , b)  $\sqrt{21}$ .
- 7a) 34, b) 5
- 8a)
- a.  $3\sqrt{3}$ , b) 32
- 9a)  $\frac{15}{2}$ , b) 3

## 9. PRIAMKY A ROVINY V PRIESTORE

1. Nájdite všeobecnú rovnicu roviny s normálovým vektorom  $\mathbf{n}$ , ktorá prechádza bodom  $P$ .
- a.  $P = (1, 2, 3)$ ,  $\mathbf{n} = (2, -3, 1)$
- b.  $P = (-2, 3, 5)$ ,  $\mathbf{n} = (3, 7, -2)$
2. Nájdite všeobecnú rovnicu roviny prechádzajúcu cez body  $A, B, C$ .
- a.  $A = (1, 0, -1)$ ,  $B = (0, 2, 3)$ ,  $C = (-2, 1, 1)$
- b.  $A = (-1, 3, 2)$ ,  $b = (2, 1, -1)$ ,  $C = (3, 2, 1)$
3. Rozhodnite, či roviny sú rovnobežné.
- a.  $2x - y + 3z + 3 = 0$ ,  $-4x + 2y + 9z + 1 = 0$
- b.  $-x + 3y + 2z + 1 = 0$ ,  $2x - 6y - 4z + 5 = 0$
4. Rozhodnite, či priamka  $p$  a rovina  $\rho$  sú rovnobežné.
- 1a)  $2x - 3y + z + 1 = 0$ , b)  $3x + 7y - 2z - 5 = 0$ .
- 2a)  $2y - z - 1 = 0$ , b)  $x + 9y - 5z - 16 = 0$ .
- 3a) rôznobežné, b) rovnobené.
- 4a) nie, b) áno  $p \parallel \rho$ .
- 5a) áno,  $p \perp \rho$ , b) nie.
- 6a)  $p: x = -41 - 5t, y = t, z = -12 - t, t \in R$ ,  
b)  $p: x = 5t, y = t, z = -5t, t \in R$ .
7.  $\rho: (x + 1) + 2(y - 4) - (z + 3) = 0$
- 8a)  $\rho: z = 4$ , b)  $\rho: y = 2$ ,
- c)  $\rho: (x + 1) + (y - 2) + (z - 4) = 0$ .
9.  $4x - 13y + 21z - 14 = 0$ .
10.  $(x - \frac{5}{2}) + y + 4(z - 3) = 0$
- 11a)  $p \cap q = (-17, -1, 1)$ , b)  $p \cap q = \emptyset$ .

## Výsledky