

FUNKCIE

Definícia. Nech $A \subseteq R, B \subseteq R$ sú dve množiny a f pravidlo, ktoré $\forall x \in A$ priradí jediný prvok $f(x) \in B$. Toto priradenie nazývame funkciou z množiny A do množiny B , označujeme $f: A \rightarrow B$.

Poznámka. Množinu A nazývame definičný obor funkcie, označujeme $A = D(f)$, množinu B nazývame koobor funkcie.

Množinu $H(f) = \{f(x), x \in A\}$ nazývame obor hodnôt funkcie f .

Množinu $G(f) = \{(x, y) \in R^2: y = f(x), x \in A\}$ nazývame grafom funkcie f .

Definícia (Zúženie funkcie). Nech $C \subset A, f: A \rightarrow R, g: C \rightarrow R$ a nech $\forall x \in C: f(x) = g(x)$. Funkciu f nazývame rozšírením funkcie g na množinu A , funkciu g nazývame zúžením funkcie f na množinu C , označujeme $g = f|_C$.

Definícia (Algebraické operácie s funkciami). Nech $f: A \rightarrow R, g: C \rightarrow R$ a nech $D = A \cap C \neq \emptyset$. Potom

$$f + g: D \rightarrow R, \forall x \in D: (f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

$$f \cdot g: D \rightarrow R, \forall x \in D: (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x).$$

$$\text{Ak } E = A \cap \{x \in C: g(x) \neq 0\} \neq \emptyset, \text{ tak } \frac{f}{g}: E \rightarrow R, \forall x \in E: \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Definícia (Zložená funkcia). Nech $f: A \rightarrow R, g: B \rightarrow R$ a nech $f(A) \subset B$. Funkciu $g \circ f: A \rightarrow R, \forall x \in A: (g \circ f)(x) = g(f(x))$, nazývame zloženou funkciou z funkcií f a g . Funkcia f sa nazýva vnútorná zložka, g vonkajšia zložka funkcie $g \circ f$.

Poznámka. Skladanie dvoch funkcií nie je komutatívna operácia ($g \circ f \neq f \circ g$).

Definícia. Nech A, B sú podmnožiny $R, f: A \rightarrow B$.

(a) Ak pre ľubovoľné $x_1, x_2 \in A: x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, tak funkcia f sa nazýva injektia.

(b) Ak $H(f) = B$, tak funkcia f sa nazýva surjektia.

(c) Ak funkcia f je injekciou a surjekciou, tak sa nazýva bijektia.

Definícia (Inverzná funkcia). Nech $f: A \rightarrow B$ je bijektia. Funkciu $f^{-1}: B \rightarrow A$ definovanú vzťahom $f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y, \forall x \in A, y \in B$, nazývame inverznou funkciou k funkcii f .

Vlastnosti inverznej funkcie

- $\forall x \in A: (f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x, \quad f^{-1} \circ f: A \rightarrow A \quad f^{-1} \circ f = \text{id}_A.$
- $\forall y \in B: (f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = y, \quad f \circ f^{-1}: B \rightarrow B \quad f \circ f^{-1} = \text{id}_B.$
- $G(f^{-1}) = \{(y, x) \in B \times A: (x, y) \in G(f)\}$ (symetria podľa priamky $y = x$).

Definícia (Párna a nepárna funkcia).

Nech $f: A \rightarrow R$, nech $\forall x \in A$ platí $-x \in A$. Ak

1. $\forall x \in A: f(-x) = f(x)$, tak f nazývame párnou funkciou.

2. $\forall x \in A: f(-x) = -f(x)$, tak f nazývame nepárnou funkciou.

Definícia (Periodická funkcia).

Hovoríme, že funkcia $f: A \rightarrow R$ je periodická s periódou $p \neq 0$, ak platí:

1. $\forall x \in A: x + p \in A$,

2. $\forall x \in A: f(x + p) = f(x)$.

Majmenšie kladné reálne číslo s danou vlastnosťou sa nazýva základná perióda.

Definícia (Monotónne funkcie). Nech $f: A \rightarrow R$. Ak $\forall x_1, x_2 \in A$ platí:

- (a) $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, tak f sa nazýva rastúca funkcia,
- (b) $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$, tak f sa nazýva neklesajúca funkcia,
- (c) $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, tak f sa nazýva klesajúca funkcia,
- (d) $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$, tak f sa nazýva nerastúca funkcia.

Veta. Každá rýdzo monotónna (rastúca alebo klesajúca) funkcia je injektia.

Definícia (Ohraničené funkcie). Nech $f: A \rightarrow R$.

- (a) Ak $\exists k \in R: \forall x \in A: k \leq f(x)$, tak hovoríme, že funkcia f je zdola ohraničená.
- (b) Ak $\exists K \in R: \forall x \in A: f(x) \leq K$, tak hovoríme, že funkcia f je zhora ohraničená.
- (c) Ak funkcia f je zdola a zhora ohraničená, tak hovoríme, že je ohraničená.

Definícia (Infimum funkcie). Nech $f: A \rightarrow R$. Číslo $m \in R$ sa nazýva infimum funkcie f , označujeme $m = \inf_{x \in A} f(x)$, ak platí:

- 1. $\forall x \in A: m \leq f(x)$ (m je dolným ohraničením funkcie).
- 2. $\forall k > m \exists x_k \in A: f(x_k) < k$ (m je najväčšie dolné ohraničenie).

Definícia (Supremum funkcie). Nech $f: A \rightarrow R$. Číslo $M \in R$ sa nazýva supremum funkcie f , označujeme $M = \sup_{x \in A} f(x)$, ak platí:

- 1. $\forall x \in A: f(x) \leq M$ (M je horné ohraničenie funkcie).
- 2. $\forall K < M \exists x_K \in A: K < f(x_K)$ (M je najmenšie horné ohraničenie).

Poznámka. Ak v definíciách nahradíme funkciu f zúžením funkcie na množinu C , $f|_C$, tak hovoríme, že f má danú vlastnosť na množine C .

CYKLOMETRICKÉ FUNKCIE

1. Ak funkciu $f(x) = \sin x$ zúžime na interval $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$, tak funkcia $\sin|_{\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle}$ je rastúca, t.j. $\sin|_{\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle}: \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle \rightarrow \langle -1, 1 \rangle$ je bijektia, existuje k nej inverzná funkcia **arkussínus**, $\arcsin = \left(\sin|_{\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle} \right)^{-1}$, $\arcsin: \langle -1, 1 \rangle \rightarrow \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle: \arcsin y = x \Leftrightarrow \sin x = y$.

2. Ak funkciu $f(x) = \cos x$ zúžime na interval $\langle 0, \pi \rangle$, tak funkcia $\cos|_{\langle 0, \pi \rangle}$ je klesajúca, t.j. $\cos|_{\langle 0, \pi \rangle}: \langle 0, \pi \rangle \rightarrow \langle -1, 1 \rangle$ je bijektia, existuje k nej inverzná funkcia **arkuskosínus**, $\arccos = \left(\cos|_{\langle 0, \pi \rangle} \right)^{-1}$, $\arccos: \langle -1, 1 \rangle \rightarrow \langle 0, \pi \rangle: \arccos y = x \Leftrightarrow \cos x = y$.

3. Ak funkciu $f(x) = \operatorname{tg} x$ zúžime na interval $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, tak funkcia $\operatorname{tg}|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}$ je rastúca, t.j. $\operatorname{tg}|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow R$ je bijektia, existuje k nej inverzná funkcia **arkustangens**, $\operatorname{arctg} = \left(\operatorname{tg}|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})} \right)^{-1}$, $\operatorname{arctg}: R \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}): \operatorname{arctg} y = x \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = y$.

4. Ak funkciu $f(x) = \operatorname{cotg} x$ zúžime na interval $(0, \pi)$, tak funkcia $\operatorname{cotg}|_{(0, \pi)}$ je klesajúca, t.j. $\operatorname{cotg}|_{(0, \pi)}: (0, \pi) \rightarrow R$ je bijektia, existuje k nej inverzná funkcia **arkuskotangens**, $\operatorname{arccotg} = \left(\operatorname{cotg}|_{(0, \pi)} \right)^{-1}$, $\operatorname{arccotg}: R \rightarrow (0, \pi): \operatorname{arccotg} y = x \Leftrightarrow \operatorname{cotg} x = y$.