Riešenia a komentáre

1. **(5 bodov)** Vypočítajte limitu $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x}{x+2-\sqrt{x+4}}$.

Riešenie:

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x}{x+2-\sqrt{x+4}} \cdot \frac{x+2+\sqrt{x+4}}{x+2+\sqrt{x+4}} = \lim_{x\to 0} \frac{3x\left(x+2+\sqrt{x+4}\right)}{(x+2)^2-(x+4)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{3x\left(x+2+\sqrt{x+4}\right)}{x(x+3)} = \lim_{x\to 0} \frac{3\left(x+2+\sqrt{x+4}\right)}{x+3} = \frac{3.4}{3} = 4$$

Komentár ♣

- Za správne rozšírenie zlomku v pôvodnej limite sú **3 body**.
- Za správny výpočet limity sú **2 body**.

2. **(5 bodov)** Nájdite deriváciu funkcie $f(x) = \operatorname{tg}\left[2x^2 - x\ln(x+2)\right]$.

Riešenie:

$$f'(x) = \frac{4x - \left(\ln(x+2) + \frac{x}{x+2}\right)}{\cos^2\left[2x^2 - x\ln(x+2)\right]} = \frac{4x^2+7x-(x+2)\ln(x+2)}{(x+2)\cos^2\left[2x^2 - x\ln(x+2)\right]}$$

Komentár ♢

- Za správne použitie vzorca o derivácii zloženej funkcie sú **2 body**.
- Za správnu deriváciu $\operatorname{tg} x$ je **1 bod**.
- Za správne použitie vzorca na deriváciu súčinu je **1 bod**.
- Za správne zderivovanie $\ln x$ je **1 bod**.

3. **(5 bodov)** Nájdite rovnicu dotyčnice ku grafu funkcie $f(x) = x \ln x$ v bode, v ktorom normála je kolmá na priamku $3x - 3y + 7 = 0$.

Riešenie: Priamka zo zadania má smernicový tvar $y = x + \frac{7}{3}$ a jej smernica je 1. Keďže normála je na túto priamku kolmá, bude dotyčnica s touto priamkou rovnobežná a jej smernica je $k_t = 1$.

Derivácia funkcie je $f'(x) = 1 + \ln x$ a keďže hodnota derivácie v bode x_0 je veľkosť smernice dotyčnice v tomto bode a smernica dotyčnice má byť $k_t = 1$, môžeme z rovnice $1 + \ln x = 1$ a z danej funkcie vypočítať dotykový bod. Dotykový bod bude $A = [x_0, y_0] = [1, 0]$. Rovnica dotyčnice bude $t: \ y = k_t x + q$, pričom x_0, y_0 a k_t už poznáme. Takže si vieme vypočítať $q = -1$. Takže rovnica hladanej dotyčnice je $t: \ y = x - 1$.

Komentár ♡

- Za nájdenie smernice dotyčnice sú sú **2 body**.
- Za správny výpočet derivácie funkcie je **1 bod**.
- Za nájdenie dotykového bodu je **1 bod**.
- Za správne nájdenie rovnice dotyčnice je **1 bod**.

4. **(5 bodov)** Nájdite definičný obor, intervaly monotónnosti a lokálne extrémy funkcie

$$f(x) = e^{2x-3}\left(x^2 - 2x - 1\right).$$

Riešenie: Definičný obor danej funkcie je $D(f) = \mathbb{R}$. Derivácia funkcie je

$$f'(x) = 2e^{2x-3}\left(x^2 - x - 2\right) = 2e^{2x-3}(x+1)(x-2),$$

čiže stacionárne body sú $x_1 = -1$ a $x_2 = 2$. Tieto nám rozdelia definičný obor na intervaly $(-\infty, -1)$, $(-1, 2)$, $(2, \infty)$ a ľahko sa nahliadne, že na krajných dvoch intervaloch funkcia stúpa a na prostrednom klesá. Takže funkcia je rastúca na intervaloch $(-\infty, -1)$, $(2, \infty)$ a klesajúca na intervale $(-1, 2)$. Lokálne minimum má v bode $x_1 = 2$ a lokálne maximum má v bode $x_2 = -1$.

Komentár ♠

- Za správne určenie definičného oboru je **1 bod**.
- Za správne nájdenie derivácie funkcie sú **2 body**.
- Za správne určenie intervalov monotónnosti je **1 bod**.
- Za správne určenie lokálnych extrémov (stačia x-ové súradnice) je **1 bod**.