Riešenia a komentáre

1. **(5 bodov)** Vypočítajte limitu $\lim_{x\to 0} \dfrac{x+3-\sqrt{x+9}}{2x}$.

Riešenie:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x+3-\sqrt{x+9}}{2x} \cdot \frac{x+3+\sqrt{x+9}}{x+3+\sqrt{x+9}} = \lim_{x\to 0} \frac{(x+3)^2-(x+9)}{2x\left(x+3+\sqrt{x+9}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x(x+5)}{2x\left(x+3+\sqrt{x+9}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{x+5}{2\left(x+3+\sqrt{x+9}\right)} = \frac{5}{2.6} = \frac{5}{12}$$

Komentár ♣

- Za správne rozšírenie zlomku v pôvodnej limite sú **3 body**.
- Za správny výpočet limity sú **2 body**.

2. **(5 bodov)** Nájdite deriváciu funkcie $f(x) = \sin\left[\sqrt{x+1} - \ln\left(e^x+1\right)\right]$.

Riešenie:

$$f'(x) = \cos\left[\sqrt{x+1} - \ln\left(e^x+1\right)\right] \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{e^x}{e^x+1}\right)$$

Komentár ♢

- Za správne použitie vzorca o derivácii zloženej funkcie sú **2 body**.
- Za správnu deriváciu $\sin x$ je **1 bod**.
- Za správne zderivovanie $\sqrt{x}$ je **1 bod**.
- Za správne zderivovanie $\ln x$ je **1 bod**.

3. **(5 bodov)** Nájdite rovnicu dotyčnice ku grafu funkcie $f(x) = x^2 - 3x + 2$ v bode, v ktorom dotyčnica je kolmá na priamku $x + y - 1 = 0$.

Riešenie: Priamka zo zadania má smernicový tvar $y = -x + 1$ a jej smernica je -1. Keďže dotyčnica je na túto priamku kolmá, bude smernica dotyčnice $k_t = 1$.

Derivácia funkcie je $f'(x) = 2x - 3$ a keďže hodnota derivácie v bode x_0 je veľkosť smernice dotyčnice v tomto bode a smernica dotyčnice má byť $k_t = 1$, môžeme z rovnice $2x - 3 = 1$ a z danej funkcie vypočítať dotykový bod. Dotykový bod bude $A = [x_0, y_0] = [2, 0]$. Rovnica dotyčnice bude $t: \ y = k_t x + q$, pričom x_0, y_0 a k_t už poznáme. Takže si vieme vypočítať $q = -2$. Takže rovnica hladanej dotyčnice je $t: \ y = x - 2$.

Komentár ♡

- Za nájdenie smernice dotyčnice sú sú **2 body**.
- Za správny výpočet derivácie funkcie je **1 bod**.
- Za nájdenie dotykového bodu je **1 bod**.
- Za správne nájdenie rovnice dotyčnice je **1 bod**.

4. **(5 bodov)** Nájdite definičný obor, intervaly monotónnosti a lokálne extrémy funkcie

$$f(x) = e^{2x+1}\left(2x^2 - 10x + 11\right).$$

Riešenie: Definičný obor danej funkcie je $D(f) = \mathbb{R}$. Derivácia funkcie je

$$f'(x) = 4e^{2x+1}\left(x^2 - 4x + 3\right) = 4e^{2x+1}(x-1)(x-3),$$

čiže stacionárne body sú $x_1 = 1$ a $x_2 = 3$. Tieto nám rozdelia definičný obor na intervaly $(-\infty, 1)$, $(1, 3)$, $(3, \infty)$ a ľahko sa nahliadne, že na krajných dvoch intervaloch funkcia stúpa a na prostrednom klesá. Takže funkcia je rastúca na intervaloch $(-\infty, 1)$, $(3, \infty)$ a klesajúca na intervale $(1, 3)$. Lokálne minimum má v bode $x_1 = 3$ a lokálne maximum má v bode $x_2 = 1$.

Komentár ♠

- Za správne určenie definičného oboru je **1 bod**.
- Za správne nájdenie derivácie funkcie sú **2 body**.
- Za správne určenie intervalov monotónnosti je **1 bod**.
- Za správne určenie lokálnych extrémov (stačia x-ové súradnice) je **1 bod**.