Konvexnosť a konkávnosť.

V literatúre môžete nájsť rozličné definície konvexnosti a konkávnosti funkcie. Všetky nejakým spôsobom popisujú tvar priehybu funkcie. Použijeme túto:

Definícia. Nech $f : I \to R$ je funkcia definovaná, na intervale I.

Hovoríme, že funkcia f je na intervale I:

- konvexná, ak $\forall x_1, x_2, x_3 \in I$ platí $x_1 < x_2 < x_3 \Rightarrow \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \dfrac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$
- rýdzo konvexná, ak $\forall x_1, x_2, x_3 \in I$ platí $x_1 < x_2 < x_3 \Rightarrow \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \dfrac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$
- konkávna, ak $\forall x_1, x_2, x_3 \in I$ platí $x_1 < x_2 < x_3 \Rightarrow \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq \dfrac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$
- rýdzo konkávna, ak $\forall x_1, x_2, x_3 \in I$ platí $x_1 < x_2 < x_3 \Rightarrow \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > \dfrac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$

Veta (konvexnosť a 1. derivácia). *Nech $f : I \to R$ je funkcia diferencovateľná, na intervale I.*

Potom:

- *funkcia f je konvexná na $I \Leftrightarrow f'(x)$ je na I neklesajúca,*
- *funkcia f je konkávna na $I \Leftrightarrow f'(x)$ je na I nerastúca,*
- *ak je $f'(x)$ na I rastúca, tak f je rýdzo konvexná na I*
- *ak je $f'(x)$ na I klesajúca, tak f je rýdzo konkávna na I*

Veta (konvexnosť a 2. derivácia). *Nech $f : I \to R$ je funkcia dvakrát diferencovateľná, na intervale I.*

Potom:

- *ak je $f''(x) > 0$ na I, tak f je rýdzo konvexná na I,*
- *ak je $f''(x) < 0$ na I, tak f je rýdzo konkávna na I.*

Definícia. Nech $f : I \to R$ je funkcia dvakrát diferencovateľná, na intervale I.

Bod x_0, v ktorom je $f''(x_0) = 0$ a f'' má na intervaloch (a, x_0) a (x_0, b) rôzne znamienka nazývame inflexný bod funkcie f.

Nájdite intervaly, na ktorých je funkcia konvexná resp. konkávna.

(V zadaniach sú rovnaké funkcie, ako v prí kladoch o monotónnosti, ako medzivýsledky môžete použiť výsledky z predchádzajúcej časti.)

1. $f(x) = 4x^3 - 10x^2 + 7x - 7.$
2. $f(x) = x + \frac{1}{x}.$
3. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

4. $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}$.
5. $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-2}}$. (Pozor na D_f .)
6. $f(x) = \ln(1-x^2)$.
7. $f(x) = \ln\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$.
8. $f(x) = e^{x^2}(x^2-3)$.
9. $f(x) = e^{-x^2}(x^2+2)$.
10. $f(x) = \sqrt{1-e^{-x^2}}$.
11. $f(x) = \operatorname{arctg}(\cos x)$.

Výsledky

1. Konkávna na $(-\infty, \frac{5}{6}]$ konvexná na $[\frac{5}{6}, \infty)$.
   Bod $x_1 = \frac{5}{6}$ je inflexný bod.
2. Konkávna na $(-\infty, 0)$ konvexná na $(0, \infty)$.
   Nemá inflexný bod.
3. Konvexná na $(-\infty, 0]$ konkávna na $[0, \infty)$.
   Bod $x_1 = 0$ je inflexný bod.
4. Konkávna na $(-\infty, -2]$ a na $[2, \infty)$ konvexná na $[-2, 2]$.
   Body $x_1 = -2$, $x_2 = 2$ sú inflexné body.
5. Konvexná na $(-\infty, -\sqrt{2}, \infty)$ a na $(\sqrt{2}, \infty)$.
   Nemá inflexný bod.
6. Konkávna na $(-1, 1)$.
7. Konkávna na $[-1, 1]$ konvexná na $(-\infty, -1]$ a na $[1, \infty)$.
   Body $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ sú inflexné body.