

3 LIMITA A SPOJITOSŤ FUNKCIE

Veta (o vynulovaní ohraničenej). *Nech $f : A \rightarrow R, g : A \rightarrow R$. Nech existuje limita $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, a nech je funkcia $g(x)$ ohraničená.*

Potom $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = 0$.

Veta (o limite zloženej funkcie). *Nech $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow R$. Nech*

- *existuje limita $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$,*
- *existuje limita $\lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = L$,*
- *$f(x) \neq y_0$ na nejakom prstencovom okolí $O_\delta^\circ(x_0)$.*

Potom $\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = \lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = L$.

Vypočítajte limitu

1. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x - \pi}$.
2. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$.
3. $\lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x}$.
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg} x \sin \frac{1}{x}$.

Veta (o výpočte s nevlastnou limitou). *Nech $f : A \rightarrow R, g : A \rightarrow R$, nech existuje limita $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ a nech x_0 je hromadný bod množiny A .*

Potom

- *ak je funkcia $g(x)$ ohraničená zdola, tak $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + g(x) = +\infty$,*
- *ak je funkcia $g(x)$ ohraničená zdola kladnou konštantou, tak $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = +\infty$,*
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$,
- *ak $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ a $f(x) > 0$ na nejakom prstencovom okolí $O_\delta^\circ(x_0)$, tak $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.*

Vypočítajte limitu

5. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x + \frac{1}{x}$.
6. $\lim_{x \rightarrow \infty} x + \frac{1}{x}$.
7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 - \cos x}$.
8. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln x}$.

Vypočítajte limitu v nevlastnom bode

$$9. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 4x^2 - 5x - 6}{3x^3 - 4x + 13} .$$

$$10. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 4x^2 - 5x - 6}{3x^2 - 4x + 3} .$$

$$11. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 5x - 6}{3x^3 - 3x + 8} .$$

$$12. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^3 - 4x^2 - 5x - 6}{3x^2 - 4x + 3} .$$

$$13. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^4 - 3x + 5}}{3x^2 + 4x - 13} .$$

$$14. \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 1} - x .$$

$$15. \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + x} - x .$$

$$16. \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^4 + x^3} - x^2 .$$

Vypočítajte limitu

$$17. \lim_{x \rightarrow 0} x(\operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x) .$$

$$18. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sqrt{x+1} - 1} .$$

Definícia. Nech $f : A \rightarrow R$, a nech $x_0 \in A$. Hovoríme, že funkcia f je v bode x_0 spojitá, ak existuje vlastná limita

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Zistite, či je v danom bode x_0 spojitá funkcia f

$$19. x_0 = 0, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{tg} x}{x} & \text{pre } x < 0 \\ 2 & \text{pre } x = 0 \\ \frac{\sqrt{x+4} - 2}{\sqrt{x+1} - 1} & \text{pre } x > 0 \end{cases} .$$

$$20. x_0 = 0, \quad f(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{x} + 1} - \sqrt{\frac{1}{x}} & \text{pre } x < 0 \\ 0 & \text{pre } x = 0 \\ \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{2}}{\sin x} & \text{pre } x > 0 \end{cases} .$$

$$21. x_0 = 1, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1 - x^3}{1 - x} & \text{pre } x \neq 1 \\ 3 & \text{pre } x = 1 \end{cases} .$$

$$22. x_0 = 1, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1 - x^{\frac{1}{2}}}{1 - x} & \text{pre } x \neq 1 \\ \frac{1}{2} & \text{pre } x = 1 \end{cases} .$$

23. Grafy funkcií $f(x) = \frac{\cos x + 1}{(x - \pi)^2}$ pre $x > \pi$ a $g(x) = \frac{x^2}{1 - \cos x}$ pre $x < 0$ spojte úsečkou tak, aby funkcia

$$h(x) = \begin{cases} \frac{\cos x + 1}{(x - \pi)^2} & \text{pre } x > \pi \\ ax + b & \text{pre } 0 \leq x \leq \pi \\ \frac{x^2}{1 - \cos x} & \text{pre } x < 0 \end{cases}$$

bola spojitá.

VÝSLEDKY

1. -1 2. -1 3. 0 4. 0 5. ∞ 6. ∞ 7. ∞ 8. 0 9. $\frac{2}{3}$
 10. ∞ 11. 0 12. $-\infty$ 13. $\frac{1}{3}$ 14. 0 15. $\frac{1}{2}$ 16. ∞ 17. -1 18. 0
 19. nie je, 20. nie je, 21. je 22. je 23. $a = -\frac{3}{2\pi}$, $b = 2$