

12 URČITÝ INTEGRÁL

Veta (hlavná veta integrálneho počtu). *Nech $f : [a, b] \rightarrow R$ je spojitá funkcia. Potom funkcia*

$$F(x) = \int_a^x f(y) dy$$

je primitívna funkcia k funkcii f .

Dôsledok (Newton - Leibnitzov vzorec). *Nech $f : [a, b] \rightarrow R$ je spojitá funkcia.*

Potom

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Vypočítajte určité integrály.

1. $\int_1^2 x^2 + 2 dx$
2. $\int_1^2 \sqrt{x} + \sqrt{\frac{1}{x}} dx$
3. $\int_3^{12} \frac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-3}} dx$
4. $\int_0^{2\pi} \sin x \cos 2x dx$

Veta (o metóde per partes). *Nech $f, g : [a, b] \rightarrow R$ sú diferencovateľné funkcie. Potom*

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) dx$$

Metódou per partes vypočítajte určité integrály.

5. $\int_0^\pi x^2 \sin 2x dx$
6. $\int_1^e x^2 \ln^2 x dx$
7. $\int_{-\pi}^\pi e^x \sin x dx$
8. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\sin^2 x} dx$

Veta (o substitučnej metóde I). *Nech $\varphi : [a, b] \rightarrow J$ je diferencovateľná funkcia $f : J \rightarrow R$ je spojitá funkcia a nech $F : J \rightarrow R$ je primitívna funkcia k f . Potom*

$$\int_a^b f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y) dy = [F(y)]_{\varphi(a)}^{\varphi(b)}$$

Veta (o substitučnej metóde II). *Nech $\varphi : I \rightarrow [a, b]$ je diferencovateľná bijekcia $f : [a, b] \rightarrow R$ je spojitá funkcia a nech $H : I \rightarrow R$ je primitívna funkcia k $f(\varphi(t))\varphi'(t)$. Potom*

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = [H(t)]_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)}$$

Vhodnou substituční metodou vypočítajte určité integrály.

9. $\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$
10. $\int_1^e \frac{1+\ln x}{x} dx$
11. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos x} dx$
12. $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{(1+x^2)}} dx$
13. $\int_{-1}^1 \sqrt{(1-x^2)} dx$
14. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}} dx$
15. $\int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{(x^2+1)}} dx$
16. $\int_0^3 x\sqrt{9-x^2} dx$
17. $\int_1^{64} \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}} dx$

Výsledky.

Určité integrály:

1. $\frac{13}{3}$
2. $\frac{2}{3}(5\sqrt{2}-4)$
3. $\frac{1}{6}(13^{3/2}+19)$
4. 0 .

Per partes:

5. $-\frac{\pi^2}{2}$
6. $\frac{1}{27}(5e^3-2)$
7. $\frac{e^\pi - e^{-\pi}}{2} = \sinh \pi$
8. $\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$

Substitúcia:

9. $-\sqrt{e}+e$
10. $\frac{3}{2}$
11. 2
12. $\sqrt{2}-1$
13. $\frac{\pi}{2}$
14. $\ln(1+\sqrt{2})$
- 15.
16. 9
- 17.