

## 10 NEURČITÝ INTEGRÁL

**Definícia.** Nech  $f : I \rightarrow R$ . Funkciu  $F : I \rightarrow R$  takú, že pre každé  $x \in I$  je  $F'(x) = f(x)$  nazývame primitívna funkcia k funkcii  $f$ .

**Veta.** Nech  $F_1, F_2 : I \rightarrow R$  sú primitívne funkcie k funkcii  $f$ . Potom  $F_1(x) - F_2(x) = c$ .

**Veta(o linearite).** Nech  $F, G : I \rightarrow R$  sú primitívne funkcie k funkciám  $f$  a  $g$ . Potom funkcia  $\alpha F(x) + \beta G(x)$  je primitívna funkcia k funkcii  $\alpha f + \beta g$ .

Iné označenie:

$$\int \alpha f(x) + \beta g(x) dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx$$

**Vypočítajte neurčité integrály.**

1.  $\int x^2 + 2 dx$
2.  $\int \sqrt{x} + \sqrt{\frac{1}{x}} dx$
3.  $\int \frac{1}{x} + \sin x dx$
4.  $\int \frac{2}{1+x^2} dx$
5.  $\int (\operatorname{tg} x)^2 dx$
6.  $\int \sqrt{1 + \sin 2x} dx$
7.  $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx$
8.  $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx$
9. (Ťažký.)  $\int \frac{x^2}{1-x^2+\sqrt{1-x^2}} dx$

*Výsledky.*

1.  $\frac{x^3}{3} + 2x + c$
2.  $\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + 2x^{\frac{1}{2}} + c$
3.  $\ln|x| - \cos x + c, x \neq 0,$
4.  $2\operatorname{arctg} x + c$
5.  $\operatorname{tg} x - x + c, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
6.  $\sin x - \cos x + c,$
7.  $\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x + c$
8.  $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sin x + c.$

**Veta(o metóde per partes).** Nech  $f, g : I \rightarrow R$  sú diferencovateľné funkcie. Potom

$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx$$

**Metódou per partes vypočítajte neurčité integrály.**

1.  $\int x e^{2x} dx$
2.  $\int x^2 e^x dx$
3.  $\int x^2 \ln x dx$
4.  $\int (x^2 + 1) \sin 2x dx$
5.  $\int x \operatorname{arctg} x dx$
6.  $\int x(\operatorname{arctg} x)^2 dx$
7.  $\int \operatorname{arccotg} x dx$
8.  $\int \cos 3x e^x dx$
9.  $\int \ln^2 x dx$

*Výsledky.*

1.  $(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4})e^{2x} + c$
2.  $e^x(x^2 - 2x + 2) + c$
3.  $\frac{x^3}{3}(\ln x - \frac{1}{3}) + c,$
4.  $-\frac{1}{2}(x^2 + 1) \cos(2x) + \frac{1}{2}x \sin(2x) + \frac{1}{4} \cos 2x + c,$
5.  $\frac{1}{2}(x^2 \arctan x - x + \arctan x) + c,$
6.  $\frac{1}{2}x^2 \arctan^2 x - x \arctan x + \frac{1}{2} \arctan^2 x + \frac{1}{2} \ln|x^2 + 1| + c,$
7.  $x(\frac{\pi}{2} - \arctan x) + \frac{1}{2} \ln|x^2 + 1| + c$
8.  $\frac{1}{10}e^x(\cos 3x + 3 \sin 3x) + c$
9.  $x(\ln^2 x - 2 \ln x + 2) + c.$

**Veta(o substituční metóde I).** *Nech  $\varphi : I \rightarrow J$  je diferencovatelná funkcia  $f : J \rightarrow R$  je spojitá funkcia a nech  $F : J \rightarrow R$  je primitívna funkcia k  $f$ . Potom*

$$\int f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \int f(y) dy = F(y) + c = F(\varphi(x)) + c$$

**Použitím substitúcie vypočítajte neurčité integrály.**

1.  $\int \sqrt{7 - 3x} dx$
2.  $\int \sin(2x + 1) dx$
3.  $\int (x + 3)^4 dx$
4.  $\int \frac{x}{x^2 + 1} dx$
5.  $\int \frac{x^3}{x^2 + 1} dx$
6.  $\int \frac{1}{x \ln x} dx$
7.  $\int \frac{\ln^3 x}{x} dx$
8.  $\int \operatorname{tg} x dx$
9.  $\int \sin^3 x \cos x dx$
10.  $\int \cos^2 x \sin x dx$
11.  $\int \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} dx$

*Výsledky.*

1.  $-\frac{2}{9}(7 - 3x)^{\frac{3}{2}} + c$
2.  $-\frac{1}{2} \cos(2x + 1) + c$
3.  $\frac{1}{5}(x + 3)^5 + c,$
4.  $\frac{1}{2} \ln|x^2 + 1| + c$
5.  $\frac{1}{2}(x^2 - \ln|x^2 + 1|) + c,$
6.  $\ln|\ln x| + c,$
7.  $\frac{1}{4} \ln^4|x| + c$
8.  $-\ln|\cos x| + c$
9.  $\frac{1}{4} \sin^4 x + c,$
10.  $-\frac{1}{3} \cos^3 x + c,$
11.  $\arctan(\sin x) + c.$