

Matematická statistika – příklady

1

1.1.

V medzinárodnej študijnej skupine sa nachádza 5 odborníkov z ČR, 3 zo SR, 6 z Ukrajiny, 5 z Rumunska, 2 z Maďarska a 3 z Rakúska.

- Náhodne vyberieme 6 z nich. Aká je pravdepodobnosť, že budú zastúpené všetky spomenuté krajiny?
- Náhodne vyberieme 7 (8, 9) z nich. Aká je pravdepodobnosť, že budú zastúpené všetky spomenuté krajiny?
- Náhodne vyberieme 8 z nich. Aká je pravdepodobnosť, že budú zastúpené všetky „slovanské“ krajiny?
- Náhodne vyberieme 6 z nich. Aká je pravdepodobnosť, že vo výbere nebudú zastúpené ČR a SR?
- Náhodne vyberieme 6 z nich. Aká je pravdepodobnosť, že vo výbere budú aspoň dvaja z Rumunska?

1.2. V nepriehľadnom vreci je 25 kociek očíslovaných postupne od 1 do 25.

- Náhodne vyberieme 3 kocky. Aká je pravdepodobnosť, že vo výbere sa budú nachádzať čísllice 1 aj 2? Riešte úlohu aj pre iné počty kociek vo výbere.
- Náhodne vyberieme 3 kocky. Aká je pravdepodobnosť, že vo výbere sa budú nachádzať čísllice 1, 2 aj 3? Riešte úlohu aj pre iné počty kociek vo výbere.
- Náhodne vyberieme 3 kocky. Aká je pravdepodobnosť, že súčet ich čísel bude najviac 30? Aká je pravdepodobnosť, že súčet jednotlivých cifier na vybraných kockách bude najviac 15?

1.3. Zo sady 32 kariet náhodne vyberieme 1 (2,3, ...). Aká je pravdepodobnosť, že vytiahneme eso alebo zeleň?

1.4. Hádzem kockou n -krát. Ako mám zvoliť n , aby pravdepodobnosť, že padne aspoň raz šestka, bola aspoň 50% (75, 90, 99) ?

1.5. Ak opakujeme 5-krát nezávisle rovnaký experiment, pravdepodobnosť, že pri tom nastane jav A, je 50%. Aká je pravdepodobnosť, že nastane jav A pri jednom, dvoch, 10 pokusoch?

1.6. V skupine sú šiesti útočníci. Prvý strelí do brány s pravdepodobnosťou 49%, ďalší so 75%, 41%, 20%, 34%, 63%. Každý raz vystrelí. Vypočítajte pravdepodobnosť, že padne aspoň 1 gól, dva góly.

1.7. Vo firme pracuje 40 zamestnancov. Aká je pravdepodobnosť, že práve / aspoň dvaja z nich majú narodeniny v rovnaký deň? (29.2. nemá narodeniny nikto)

Ďalšie úlohy:

<https://www.hackmath.net/cz/priklady-ulohy/pravdepodobnost>

<http://www.priklady.com/sk/index.php/pravdepodobnost-a-statistika>

<https://www.priklady.eu/sk/riesene-priklady-matematika/pravdepodobnost-a-statistika/pravdepodobnost.alej>

https://www.google.sk/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=8&cad=rja&uact=8&ved=2ahUKEwiKxrbZwJvIAhWRecAKHUd5A_cQFjAHegQICRAC&url=https%3A%2F%2Fwww.doucovaniamatematiky.sk%2Fna-stiahnutie%2Fvyriesene-priklady-s-celym-postupom-vypoctu%2FKombinatorika-a-Pravdepodobnost.pdf&usg=AOvVaw04iER7vPHI4dWTAunOCYAY

<https://math.feld.cvut.cz/prucha/m3p/u1.pdf>

<https://math.feld.cvut.cz/prucha/m3p/u2.pdf>

2

2.1. Podľa štatistiky sa zo 100 000 detí narodených v roku 2xxx dožije veku 35 rokov 94 123 a veku 65 rokov sa ich dožije 72 951. Určte pravdepodobnosť, že muž, ktorý sa dožije veku 35 rokov, sa dožije aj veku 65 rokov.

2.2. Pravdepodobnosť narodenia chlapca alebo dievčaťa v rodine XY nech je 50:50.

a) V rodine sú dve deti a vieme, že prvé z nich / jedno z nich je chlapec. Aká je pravdepodobnosť, že obe deti sú chlapci.

b) V rodine sú dve deti a vieme, že prvé z nich / jedno z nich je dievča. Aká je pravdepodobnosť, že druhé z detí je dievča?

2.3. Globálny výrobca gumových medvedíkov má výrobné prevádzky v 5 krajinách. V prvej sa vyprodukuje 30%, v druhej 25%, v tretej 20%, vo štvrtej 15% a v piatej 10%.

Pravdepodobnosť, že v sáčku s medvedíkmi sa vyskytne omylom kyslá žižala je v závislosti od krajiny (v danom poradí) 4%, 5%, 3%, 2%, 3%.

Aká je pravdepodobnosť, že v jednom náhodne vybranom balení z celoročnej produkcie bude žižala?

2.4.

<https://kurzy.kpi.fei.tuke.sk/nm/student/08.html>

<https://math.feld.cvut.cz/prucha/m3p/u3.pdf>

3

3.1.

Hádzeme dvojicou kociek (modrá a zelená, v tomto poradí čítame hodnoty).

Sledujeme tri veci:

A = prvé z čísel je najviac K

B = maximum z oboch hodnôt je aspoň L

C = prvé z čísel je nepárne

Pre hodnoty $K = 1, 2, \dots, 6$, $L = 1, 2, \dots, 6$ rozhodnite,

či sú B a C nezávislé // či sú $B|A$ a $C|A$ nezávislé.

(Je to 36 úloh – pracujte rozumne, aby ste v rámci možností riešili viac z nich „jednou ranou“)

3.2. Hádzem n kociek a sledujem $X = \text{maximum z padnutých hodnôt}$.

Pre $n = 3, 4, 5, \dots$ napíšte, aké hodnoty nadobúda X a s akou pravdepodobnosťou. Skúste nájsť riešenie všeobecne pre ľubovoľné n.

3.3. Hádzem 3 kocky a sledujem $X = \text{súčet dvoch najväčších (nie nutne ostro) padnutých hodnôt}$. Aké hodnoty nadobúda X a s akou pravdepodobnosťou?

3.4. Hádzem 3 kocky a sledujem $X = \text{rozdiel maxima a minima z padnutých hodnôt}$. Aké hodnoty nadobúda X a s akou pravdepodobnosťou?

3.5. Máme 5ks (českých) 1-korunáčiek, 4 ks 2-korún, 3 ks 5-korún, 2 ks 10-korún a jednu 20-korunu. Hádzeme túto sadu mincí na stôl a sledujeme $X = \text{súčet padnutých hodnôt}$ (znak = 0). Aké hodnoty nadobúda X a s akou pravdepodobnosťou? Počítajte tento príklad aj s inými druhmi/počtami mincí.

3.6. Hádzem 3 (4,5,6, ...) 1-eurové mince. Označím A = súčet padnutých hodnôt (číslo je 1, znak je 0). Potom vezmem A mincí a hodím ešte raz, súčet označím B.

Aké hodnoty nadobúda $X = A+B$ a s akou pravdepodobnosťou?

3.7. Hádzem 3 (4,5,6, ...) 1-eurové mince. Označím A = súčet padnutých hodnôt (číslo je 1, znak je 0). Potom ešte A-krát hodím danú sadu mincí a celkový súčet označím B.

Aké hodnoty nadobúda $X = A+B$ a s akou pravdepodobnosťou?

3.8. Messi a Ronaldo striedavo strieľajú cez celé ihrisko do prázdnej brány. Pravdepodobnosť zásahu je 0.9 (Messi) a 0.8 (Ronaldo). Aké je pravdepodobnosť, že po 10 strelách (každý po 5) trafia spoločne do brány 10, 9, 8, 7, ..., 1, 0 -krát? Aká je pravdepodobnosť, že pri danom scenári ako prvý netrafi Messi?

3.9. Házíme naraz 3 jednoeurovkami, 2 dvojeurovkami a jednou hracou kockou (1...6). X =
súčet padnutých hodnôt. Aké hodnoty nadobúda X a s akou pravdepodobnosťou?

4

4.1. (na riešenie sa odporúča využiť výpočtovú techniku)

Do školy v obci Y chodí 40 žiakov. Počas dní so snežením je pravdepodobnosť absencie žiaka 0,25.

- Aký počet neprítomných sa dá v deň so snežením s najvyššou pravdepodobnosťou (akou? – vyčíslieť) očakávať?
- Aká je pravdepodobnosť, že bude chýbať najviac 10 žiakov?
- Aká je pravdepodobnosť, že bude chýbať aspoň 10 žiakov?

4.2. Smartfón značky XYZ sa v priemere počas 10 000 hodín prevádzky zasekne 15-krát. Aká je pravdepodobnosť, že počas určených 500 hodín príde k takejto udalosti?

(Riešte cez binomické aj cez Poissonov rozdelenie a porovnajzte).

4.3. Na teste je 10 otázok, každá s voľbou jednej zo štyroch odpovedí A, B, C, D. Študent sa vôbec neučil a test vyplňa náhodne.

- Aká je pravdepodobnosť, že trafi správne aspoň 5 otázok? (podobne pre 4 a 10)
- Koľko musí mať test otázok, aby pravdepodobnosť správneho zodpovedania aspoň polovice otázok bola menej než 0,001 ?

4.4. Vo fazuli od výrobcu ZYX sa nachádza priemerne 1 zablúdený hrášok na 1000 fazuliek. Na prípravu polievky sa použije 2000 fazuliek. Jedlo zjedia piati ľudia (rovnakým dielom). Aká je pravdepodobnosť, že jeden vybraný zo stravníkov nájde u seba hrášok?

4.5. Zdravotnícky úrad zhromažďuje údaje o novo narodených deťoch. Priemerne každé dve hodiny sa narodí ďalšie dieťa. Určte

- Priemerný počet narodených detí za rok (nepriestupný).
- Pravdepodobnosť, že v danom dni sa nenarodí žiadne dieťa.
- Pravdepodobnosť, že sa v jednom dni narodí (aspoň) 20 detí.
- Pravdepodobnosť, že za 4 hodiny sa narodí aspoň 5 detí.

4.6. Po rannom príboji sa na pláž dĺžky 2 km vyplaví priemerne 200 ulít (ulity zo predošlého dňa sú vyzbierané).

- Aká je pravdepodobnosť, že ranný nadšenec po prehladaní 50 m úseku nájde aspoň 5 ulít?
- Aká je pravdepodobnosť, že nájde práve 4 ulity / práve 6 ulít?
- Aká je pravdepodobnosť, že po prehladaní 20 metrov nenájde nič?
- Ako dlhý úsek musí prehľadať, aby s pravdepodobnosťou aspoň 0,9 našiel aspoň 5 ulít?

5-6

5.1. Náhodná veličina je daná distribučnou funkciou $F(x) = x^2/4$ na $[0, d]$

a) Nájdite d , $f(x)$, $F^{-1}(x)$.

b) Nakreslite grafy f a F a vyznačte v nich pravdepodobnosť $P(0.6 < x < 1.4)$

b) Vypočítajte $E(X)$, $D(X)$

5.2. Náhodná veličina je daná funkciou hustoty

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{na } [-d, 0] \\ 1-x & \text{na } [0, d], \end{cases} \quad \text{inde } 0.$$

a) Nájdite d , $F(x)$ a $F^{-1}(x)$.

b) Nakreslite grafy f , F . Vypočítajte $P(-0.5 < x < 0.5)$ a znázornite ju v grafoch.

c) Vypočítajte $E(X)$, $\text{var}(X)$

5.3. Pravdepodobnosť, že študent príde na cvičenie s meškaním x minút, je náhodná veličina s rozdelením $\text{Exp}(0.01)$, tj. $F(t) = 1 - e^{-(0.01 \cdot t)}$ na $[0, \infty)$

a) Aká je pravdepodobnosť, že do 10 minút po začiatku budú prítomní všetci z 10 študentov?

b) Aká je pravdepodobnosť, že dvaja z desiatich sa nedostavia vôbec (=meškanie 100 minút a viac)

c) Pravdepodobnosť, že v čase t bude prítomná aspoň polovica študentov, je 50%. Vypočítajte t .

5.4. Je dané diskrétno rozdelenie

X	1	3	4	6	7	9
P	1/12	1/12	2/12	3/12	3/12	1/12

Vypočítajte strednú hodnotu, disperziu, tretí a štvrtý centrálny moment, koeficienty šikmosti a špicatosti.

7

7.1. Hádzeme dvojicou hracích kociek (zelená a modrá). Sledujeme náhodné veličiny $M = \text{maximum z oboch čísel}$ a $S = \text{súčet oboch čísel}$.

- Aké hodnoty nadobúdajú M a S ?
- Zostavte tabuľku pravdepodobností pre $M \times S$.
- Vypočítajte charakteristiky (E, D) veličín M a S , ich kovarianciu a korelačný koeficient.

7.2. Hádzeme trojicou hracích kociek (červená, zelená a modrá). Sledujeme náhodné veličiny $M = \text{prostredné z troch čísel (radených podľa veľkosti)}$

$S = \text{súčet troch čísel}$.

- Aké hodnoty nadobúdajú M a S ?
- Zostavte tabuľku pravdepodobností pre $M \times S$.
- Vypočítajte charakteristiky veličín M a S , ich kovarianciu a korelačný koeficient.

7.3. Vo vrecku sú (na hmat zhodné) kocky – 5 bielych, 3 zelené a 2 modré. Naslepo ťaháme 4 kocky. Sledovanými veličinami sú

$B = \text{počet bielych kociek}$,

$Z = \text{počet zelených kociek}$

$M = \text{počet modrých kociek vo výbere}$.

- Aké hodnoty nadobúdajú B, Z, M ?
- Zostavte tabuľky pravdepodobností pre $B \times Z, B \times M, Z \times M$.
(* Kto si trúfa, môže aj tabuľku pre $B \times Z \times M$)
- Vypočítajte charakteristiky veličín B, Z, M a po dvojiciach ich kovariancie a korelačné koeficienty.

8

8.1. Vo vreci máme 4 červené, 3 zelené a 2 modré kocky (hmatom nerozoznatel'né). Náhodne vyberieme 3 z nich. Budeme sledovať:

A – vo výbere sú zastúpené všetky farby (1 = áno, 0 = nie)

B – celý výber je jednofarebný (1 = áno, 0 = nie)

C – vo výbere je zastúpená červená (bodová hodnota = počet červených)

D – vo výbere je zastúpená zelená (bodová hodnota = počet zelených)

E – vo výbere je zastúpená modrá (bodová hodnota = počet modrých)

Vypočítajte vzájomné kovariancie veličín A, B, C, D, E a výsledky zapíšte do kovariančnej matice. Vypočítajte disperziu veličiny $A + 2B - C + D - 2E$.

8.2. Ankety sa zúčastnilo 200 respondentov. Do vekových tried sa začlenili takto:

0-18	54
18-25	70
25-40	45
40-65	30
65-105	1

a) Znázornite uvedené hodnoty v histograme.

b) Odhadnite vekový priemer zúčastnených.

c) Určte relatívne početnosti tried.

d) Určte kumulatívne a relatívne kumulatívne početnosti tried.

e) Nakreslite polygón relatívnych kumulatívnych početností.

f) Nájdite medián a kvartily (za predpokladu rovnomerného rozloženia údajov v triedach).

g) Vypočítajte 0.11-, 0.24-, 0.72- a 0.9- kvantil.

8.3. 19 dobrovoľníci v bufete si nechali odvážiť svoje obedové porcie. Výsledky (v gramoch) sú zoradené podľa veľkosti:

[165, 269, 301, 325, 327, 351, 380, 391, 397, 401, 411, 421, 426, 440, 449, 476, 503, 691, 841]

Vypočítajte aritmetický priemer, medián a kvartily, a načrtnite boxplot.