Riešenie sústav rovníc II.

Budeme sa zaoberať sústavami rovníc s rovnakou maticou A a rôznymi pravými stranami.

<u>Príklad 1:</u>

```
>> A=rand(5,5)*10-5;
>> B=rand(5,3)
```

Riešme tri sústavy rovníc: A*x=B(:,1), A*x=B(:,2), A*x=B(:,3).

B je matica s 3 stĺpcami. Predpisom B(:, i) vyberieme z matice i-tý stĺpec.

Tri sústavy môžeme riešiť na trikrát:

```
>> x1=A\B(:,1), x2=A\B(:,2), x3=A\B(:,3)

x1 =     -0.0159
         -0.2879
          0.0630
         -0.1010
         -0.1948

x2 =     -0.2188
         -0.7011
          0.0420
         -0.2566
         -0.5762

x3 =      0.0881
          0.2754
          0.0589
          0.2756
          0.1149
```

Keďže vo všetkých prípadoch je A rovnaká, nie je nevyhnutné trikrát opakovať štandardný postup riešenia sústavy rovníc. Dá sa to všetko jedným ťahom:

```
>> A\B
          X =
            -0.0159   -0.2188    0.0881
            -0.2879   -0.7011    0.2754
             0.0630    0.0420    0.0589
            -0.1010   -0.2566    0.2756
            -0.1948   -0.5762    0.1149
```

Jednotlivé riešenia xi sú vedľa seba v stĺpcoch získanej matice X.

Kontrola:

```
>>  A*X-B
```

```
ans =
          1.0e-015 *
                           0.0278    0.0243   -0.2220
                           0.0278    0.2220   -0.1110
                           0.2220    0.7772   -0.3331
                                0         0    0.1388
                          -0.1110   -0.2776    0.1110
```

Pokračujme situáciou, keď klasických riešení bude nekonečne veľa. Začneme jednoduchším príkladom, ktorý vyriešime takmer ručne, aby sme videli, čo sa deje.

<u>Príklad 2:</u>

```
>> A=[1 2 3 0; 2 -1 2 -1; 0 2 1 1],
>> B=[4 6 2; 4 2 0; 1 3 0]
```

Gaussovou elim. metódou upravíme rozšírenú maticu na trojuholníkový tvar:

```
>> M=[A B]
>> M(2,:)=M(2,:)-2*M(1,:)
>> M(3,:)=5*M(3,:)+2*M(2,:)

M =
     1    2    3    0      4    6    2
     0   -5   -4   -1     -4  -10   -4
     0    0   -3    3     -3   -5   -8
```

Ak by sme teraz (bez ohľadu na pravú stranu) chceli hľadať konkrétne riešenie sústavy tzv. spätným postupom, asi by sme zvolili x4 ako parameter t. Zvoľme si tento parameter rovný nule – x4=t=0. Rozšírená matica potom bude

```
>> M(:,4)=[0 0 0]'

M =
     1    2    3     0              4    6    2
     0   -5   -4     0             -4  -10   -4
     0    0   -3     0             -3   -5   -8
```

Ten nulový stĺpec môžeme v podstate ignorovať a aby sme neumseli trikrát opakovať “spätný chod”, urobíme všetko naraz tzv. Gaussovou-Jordanovou metódou. Toznamená, že budeme pokračovať v úprave matice A (ľavá časť M) tak, aby sme dostali nuly aj nad diagonálou a na diagonále samotnej jednotky:

```
>> M(3,:)=M(3,:)/-3
>> M(2,:)=M(2,:)+4*M(3,:)
>> M(2,:)=M(2,:)/-5
>> M(1,:)=M(1,:)-2*M(2,:)-3*M(3,:)
```

Riešenie X, tj. trojica vektorov xi, je v pravej časti matice. “Vytiahneme ho von” a vrátime mu dočasne ignorované x4, ktoré sme volili rovné 0 bez ohľadu na pravú stranu:

```
>> X=M(:,5:7)
>> X(4,:)=[0 0 0]
X =
    1.0000   -0.3333   -3.3333
         0    0.6667   -1.3333
    1.0000    1.6667    2.6667
         0         0         0
```

Skúška:

```
>> A*X-B
  1.0e-014 *
         0         0         0
         0    0.0888   -0.1776
         0         0         0
```

Nulový priestor matice A je, ako sa možno ľahko presvedčiť, t*[1 1 -1 -1]’.

Všeobecné riešenie **trojice** sústav je trojica vektorov s tromi nezávislými parametrami, ktorú možno maticovo vyjadriť:

X+[1 1 -1 -1]' * [t1 t2 t3]

Skúsime to na trochu väčšej matici a využijeme možnosti Matlabu:

<u>Príklad 3:</u>

```
>> A=rand(5, 8), B=rand(5, 4)
>> N=null(A)

N =   -3.031535971100650e-001   -2.155828878428462e-001    8.629629619291492e-002
       1.731440798777275e-001    5.772537511285438e-001    2.111374016420406e-003
      -1.348707145964248e-001   -3.716426510876688e-001   -1.944584588480614e-001
       1.911129020753131e-001    1.062680946840213e-001   -6.776152364604756e-001
      -3.547927332977575e-001    6.493167206599309e-001    2.373845405848995e-001
       8.053677155419261e-001   -2.256676461947475e-002    2.804766417393548e-001
      -2.147804030430650e-001   -1.070589219703602e-001    1.977962234523947e-001
       5.271727228972638e-002   -1.931524834287866e-001    5.669480379894422e-001
```

Štvornásobnému stĺpcu na pravej strane zodpovedá štvorica partikulárnych riešení:

```
>> X=A\B

X =
```

1.343509472671304e+000	-5.803912008206765e-001	-4.948426263165359e-001	1.033929099161515e+000
-4.693997146461904e-001	6.694151152790765e-001	4.660113592394430e-001	-4.938701006635249e-001
5.724742643691892e-002	4.432685524943117e-001	2.722799592517665e-001	5.056999149876128e-001
-2.933430227845677e-001	6.919094509416087e-001	3.449492489574478e-001	-5.654449610372667e-001
0	0	0	0
0	0	0	0
2.041357780480896e-001	-6.163017410744685e-001	6.101233943964602e-002	6.605670779173003e-001
0	0	0	0

Vidíme, že ML vie riešiť viacero sústav naraz a maticová pravá strana mu nerobí problém. Partikulárnym riešením zadanej sústavy so 4 pravými stranami je štvorica riešení, alebo inak povedané, partikulárnym riešením sústavy s maticou na pravej strane je matica X.

Všeobecné riešenie je pre každý stĺpec X(:, i) dané ako kombinácia

X(:,i)+N*[ta tb tc]’

Všeobecné riešenie celej sústavy s pravou stranou – maticou je potom (berúc do úvahy, že parametre môžu byť pre každý stĺpec iné):

X+N*T, kde T je matica parametrov s rozmermi 3x4.