Výpočet obsahu mnohouholníka

Mnohouholník je daný súradnicami svojich vrcholov: A1[x1, y1], A2[x2, y2], ... , An[xn, yn]. Aby sme sa vyhli komplikáciám, obmedzíme sa na prípad konvexného mnohouholníka. Súradnice zadáme matlabu v podobe dvoch vektorov

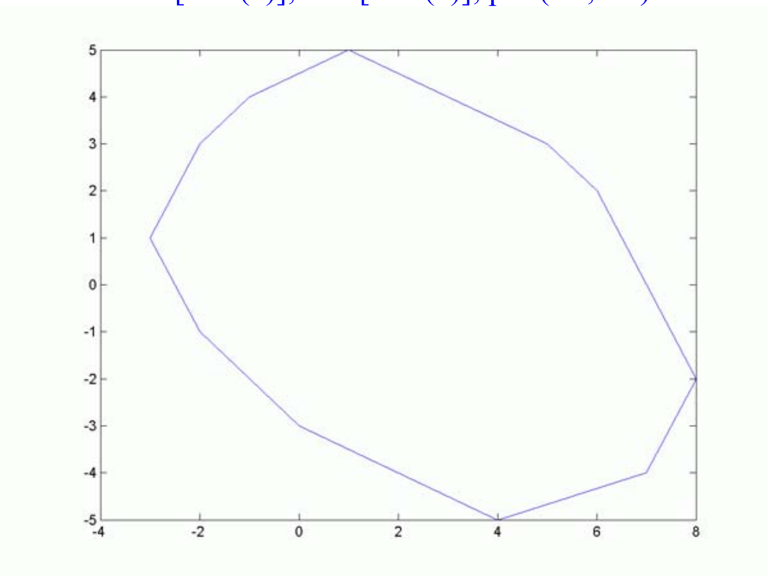
X=[x1 x2 … xn] , Y=[y1 y2 … yn].

Počítajme aj s konkrétnymi hodnotami:

```
X=[-3 -2 0 4 7 8 6 5 1 -1 -2]; Y=[1 -1 -3 -5 -4 -2 2 3 5 4 3];
```

Nakreslíme si tento mnohouholník. Pri kreslení začneme od prvého bodu, ale v prvom bode nakoniec aj skončíme. Vyrobíme si na to pomocný vektor Xe a Ye a môžeme kresliť:

```
Xe=[X X(1)]; Ye=[Y Y(1)]; plot(Xe, Ye)
```



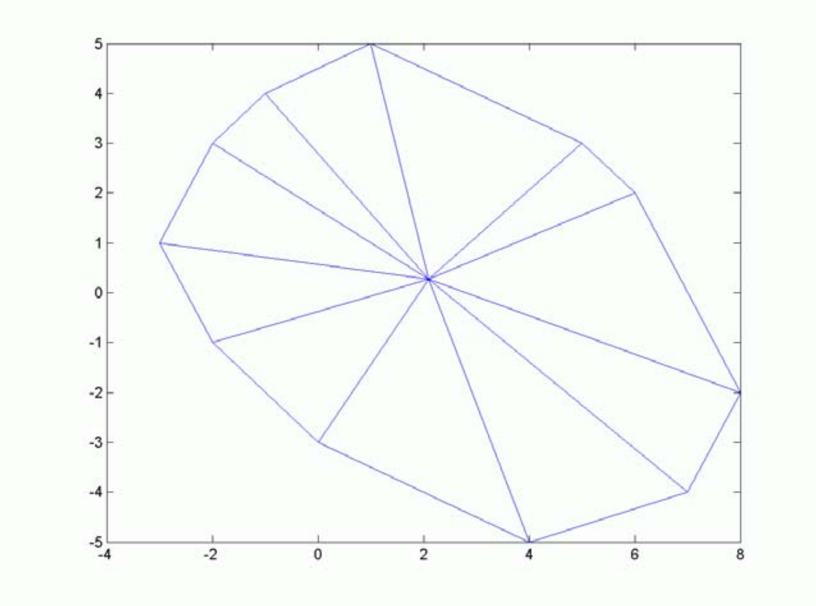
Je viacero spôsobov, ako počítať obsah mnohouholníka. Náš postup bude založený na tom, že si rozdelíme mnohouholník na trojuholníky, ktorých obsah počítať vieme.

Delenie na trojuholníky sa takisto dá urobiť viacerými spôsobmi. Pomerne pohodlné je „pokrájať tortu“, teda nájsť si bod v strede mnohouholníka a ten pospájať s vrcholmi. Vhodný stredový bod T (využívame konvexnosť mnohouholníka) sa dá nájsť ako priemer jednotlivých súradníc:

```
>> T=[mean(X) mean(Y)]

T =     2.090909090909091e+000    2.727272727272727e-001

>> n=11;
>> hold on; for i=1:n, plot([X(i),T(1)], [Y(i),T(2)]), end, shg
```



Jednotlivé trojuholníky majú body so súradnicami [Xe(i) Ye(i)], [Xe(i+1) Ye(i+1)], T. Obsah každého trojuholníka získame rýchlo pomocou dvojrozmerného vektorového súčinu

u= [T(1)-Xe(i), T(2)-Ye(i)]   pre i=1 až n
v= [T(1)-Xe(i+1), T(2)-Ye(i+1)]   pre i=1 až n
S(i)= abs(u(1)*v(2)-u(2)*v(1))/2

a obsah mnohouholníka bude súčtom obsahov týchto trojuholníkov. Práve uvedený výpočet sformulujeme vektorovo-maticovým spôsobom. Využijeme, že vektor v je zhodný s vektorom u nasledujúceho trojuholníka. Všetky vektory **u** „naložíme“ do jednej matice, ktorú pre lepšiu predstavu aj vypíšeme:

```
>> U= [T(1)-Xe; T(2)-Ye]
U =
 Columns 1 through 4

  5.090909090909091e+000   4.090909090909091e+000   2.090909090909091e+000  -1.909090909090909e+000
 -7.272727272727273e-001   1.272727272727273e+000   3.272727272727273e+000   5.272727272727273e+000

 Columns 5 through 8

 -4.909090909090909e+000  -5.909090909090909e+000  -3.909090909090909e+000  -2.909090909090909e+000
  4.272727272727273e+000   2.272727272727273e+000  -1.727272727272727e+000  -2.727272727272728e+000

 Columns 9 through 12

  1.090909090909091e+000   3.090909090909091e+000   4.090909090909091e+000   5.090909090909091e+000
 -4.727272727272728e+000  -3.727272727272728e+000  -2.727272727272728e+000  -7.272727272727273e-001
```

Potrebujeme vypočítať 11 vektorových súčinov (prvý stĺpec U s druhým, druhý s tretím, atď.). To sa dá urobiť vektorovo, bez použitia cyklov:

```
>> Ux = U(1,1:n).*U(2,2:n+1)-U(1,2:n+1).*U(2,1:n)
```

```
Ux =

 Columns 1 through 4

  9.454545454545453e+000   1.072727272727273e+001   1.727272727272727e+001   1.772727272727273e+001

 Columns 5 through 8

  1.409090909090909e+001   1.909090909090909e+001   5.636363636363638e+000   1.672727272727273e+001

 Columns 9 through 11

  1.054545454545455e+001   6.818181818181818e+000   1.090909090909091e+001
```

Vyšli samé kladné hodnoty. Je to náhoda alebo zámer? Odpoveď na otázku sa skrýva v skutočnosti, že poradie vrcholov je volené tak, aby postupovali proti smeru hodinových ručičiek. Ak ustrážime toto poradie aj pri iných príkladov, absolútna hodnota nie je potrebná. Obsahy trojuholníkov sú:

```
>> ST=Ux/2
ST =

 Columns 1 through 4

  4.727272727272727e+000   5.363636363636363e+000   8.636363636363637e+000   8.863636363636363e+000

 Columns 5 through 8

  7.045454545454546e+000   9.545454545454547e+000   2.818181818181819e+000   8.363636363636363e+000

 Columns 9 through 11

  5.272727272727273e+000   3.409090909090909e+000   5.454545454545455e+000
```

Obsah mnohouholníka je súčtom týchto obsahov:

```
>> Sp=sum(ST)

Sp = 6.950000000000000e+001
```

Obsah vychádza takmer 70. Orientačná kontrola pohľadom na obrázok – nákres sa nachádza v obdĺžniku s obsahom 120, mnohouholník z toho zaberá trošku viac ako polovicu.

Úloha:

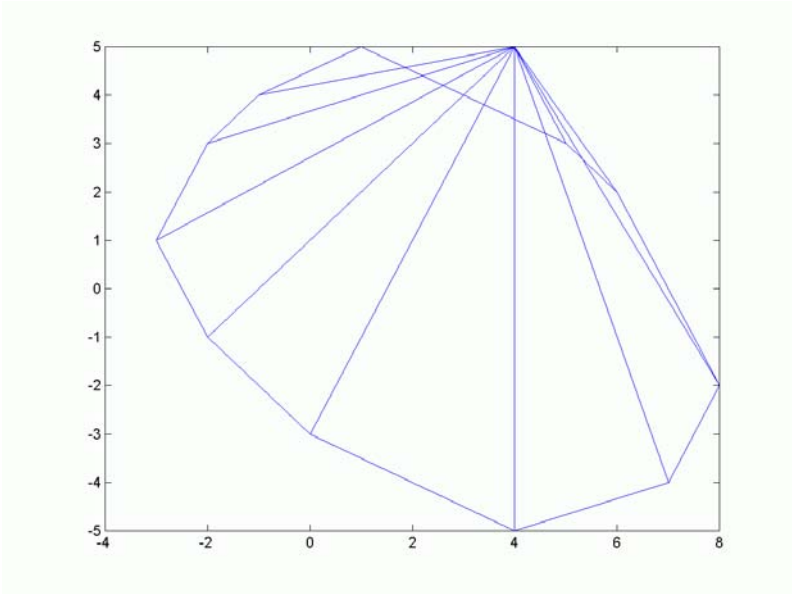
Vymyslite vhodné súradnice pre konvexný mnohouholník s 23 vrcholmi. Nakreslite ho a vypočítajte jeho obsah.

Vyššie sme videli, že pri vhodnom značení vrcholov (podľa poradia v smere proti hodinovým ručičkám) nie je potrebná absolútna hodnota, keďže nám vyšli samé kladné obsahy. Ony však boli kladné aj preto, že bod T ležal vnútri mnohouholníka. Čo sa stane, ak omylom alebo zámerne umiestnime bod T von?

```
» T=[4, 5];
```

Zrušme pôvodný obrázok a kreslime znovu:

```
» plot(Xe, Ye)
» hold on; for i=1:n, plot([X(i),T(1)], [Y(i),T(2)]), end, shg
```



Toto nevyzerá dobre. Získali sme síce trojuholníky, ale súčet ich obsahov bude nepochybne väčší než je obsah mnohouholníka. Skúsme to:

```
» U= [T(1)-Xe; T(2)-Ye];
» ST = (U(1,1:n).*U(2,2:n+1)-U(1,2:n+1).*U(2,1:n))/2

ST =
        Columns 1 through 7

          9.0000   12.0000   20.0000   15.0000    7.5000    1.0000   -0.5000

        Columns 8 through 11

         -3.0000    1.5000    2.0000    5.0000
```

Niektoré obsahy sú záporné. Pochopiteľne; poradie vrcholov je síce dobré, ale T je mimo mnohouholníka. Ak chceme výslovne spočítať obsahy trojuholníkov, absolútnej hodnote sa nevyhneme:

```
» spa=sum(abs(ST))

spa = 76.5000
```

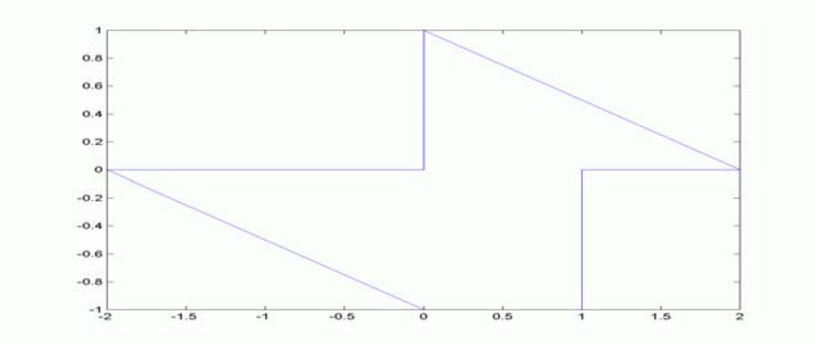
V súlade s očakávaním vyšiel súčet obsahov trojuholníkov väčší ako obsah mnohouholníka a je nám teda nanič. Skúsme to však bez absolútnej hodnoty:

```
» Sp=sum(ST)
                    Sp =   69.5000
```

Tento súčet je rovný obsahu mnohouholníka!!!

Práve sme objavili niečo, čo má veľmi vážne dôsledky. Na výpočet obsahu mnohouholníka nie je nevyhnutné, aby bod T ležal v jeho vnútri. Ak to domyslíme ďalej, tak nie je nutné, aby bol mnohouholník konvexný.[1] Keďže ide o závažné tvrdenie, ukážeme si ho na príklade, ktorý sa dá ľahko skontrolovať. Mnohouholník bude daný rozšírenými (prvý bod na konci opakujeme) vektormi súradníc:

```
» Xe=[-2 0 1 1 2 0 0 -2];
» Ye=[0 -1 -1 0 0 1 0 0];
» plot(Xe,Ye), hold on
```



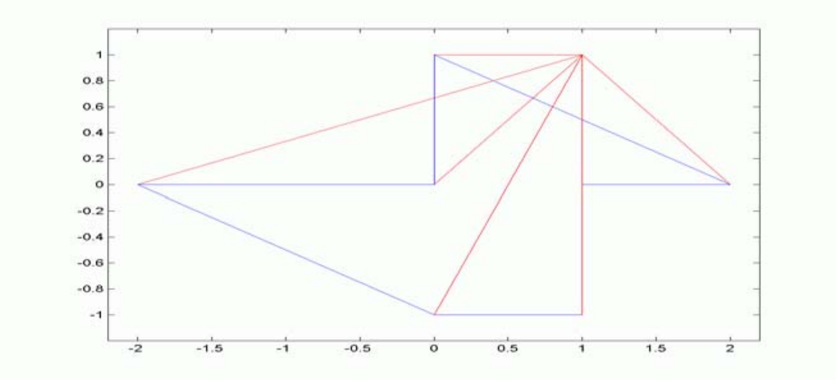
Obsah tohto útvaru vieme vyrátať spamäti: 1+1+1=3.

Ak by sme zvolili T=[0,0], vedeli by sme obísť problém nekonvexnosti, ale nám teraz nejde o to. Zvolíme preto zámerne T=[1,1] a nanovo všetko nakreslíme:

```
» T=[1 1]; n=7;
» plot(Xe,Ye), hold on, axis([-2.2 2.2 -1.2 1.2])
» for i=1:n, plot([Xe(i),T(1)], [Ye(i),T(2)], 'r'), end, shg
```

Pri kreslení dodávame príkaz axis, pomocou ktorého nastavíme „širšie okraje“, aby strany mnohouholníka nesplývali s pozadím. Delenie na trojuholníky urobíme v červenej farbe – s parametrom ‘r’, aby sa nášmu zraku nestratil pôvodný mnohouholník.

[1] Uvedené tvrdenie sa dá ešte ďalej zovšeobecniť – mnohouholníku sa môžu aj križovať niektoré hrany (tj. časti jeho plochy sú “naruby” a teda ich obsah je záporný), ale to už nechávame pre extémnych nadšencov.



Počítajme podľa osvedčeného postupu:

```
» U= [T(1)-Xe; T(2)-Ye];
» ST = (U(1,1:n).*U(2,2:n+1)-U(1,2:n+1).*U(2,1:n))/2;
» Sp=sum(ST)
                    Sp =  3
```

Výsledok je správny.

Zhrnutie

Postup na nákres a výpočet obsahu mnohouholníka:

VSTUP: `X=[? ? ... ?], Y=[? ? ... ?], T=[? ?];`

NÁKRES:

```
» Xe=[X X(1)]; Ye=[Y Y(1)]; n=length(X);
» plot(Xe,Ye), hold on, axis([-2.2 2.2 -1.2 1.2])
» for i=1:n, plot([Xe(i),T(1)], [Ye(i),T(2)], 'r'), end, shg
```

VÝPOČET:

```
» U= [T(1)-Xe; T(2)-Ye];
» Sp=sum(U(1,1:n).*U(2,2:n+1)-U(1,2:n+1).*U(2,1:n))/2;
```

Úloha

Navrhnite a nakreslite v Matlabe nekonvexný mnohouholník s 13 vrcholmi. Pokúste sa pritom vyhnúť kríženiu strán. Vypočítajte jeho obsah.