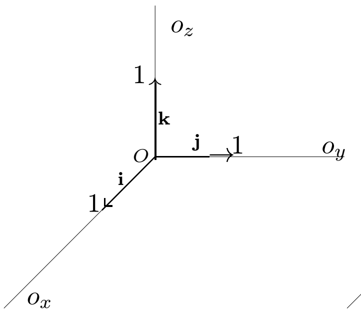
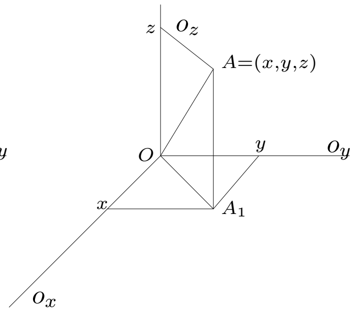
Body a vektory v priestore

V trojrozmernom priestore R^3 zvolíme bod O (počiatok súradnicovej sústavy) a tri na seba kolmé súradnicové osi tak aby sa rotácia vektora $\mathbf{i} = (1,0,0)$ do smeru vektora $\mathbf{k} = (0,1,0)$ o $90°$ javila z bodu $(0,0,1)$ ako otáčanie proti smeru hodinových ručičiek.





Bod $A_1 = (x,y,0)$ je kolmý priemet bodu A do roviny xy. Pravouhlý trojunolník OA_1A má dĺžky odvesien $\|A_1A\| = |z|$, $\|OA_1\| = \sqrt{x^2+y^2}$, preto podľa Pytagorvej vety
$d(O,A) = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \|\overrightarrow{OA}\|$

Definícia. Orientovaná úsečka $\overrightarrow{AB}$, ktorá má počiatočný bod $A = (a_1,a_2,a_3)$ a koncový bod $B = (b_1,b_2,b_3)$ sa nazýva umiestnenie vektora $\mathbf{u} = (u_1,u_2,u_3)$, ak $u_1 = b_1 - a_1$, $u_2 = b_2 - a_2$, $u_3 = b_3 - a_3$. V takom prípade píšeme $\mathbf{u} = B - A$.

Uhlom dvoch nenulových vektorov $\mathbf{u},\mathbf{v}$, $\measuredangle\mathbf{uv}$ sa nazýva uhol $\alpha \in \langle 0,\pi\rangle$, ktorý zvierajú umiestnenia vektorov $\mathbf{u},\mathbf{v}$ so spoločným počiatočným bodom.

Veta. *Trojica vektorov* $(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})$ *je lineárne závislá vtedy a len vtedy, keď sa dajú umiestniť do jednej roviny.*

Veta. *Nech* $A = (a_1,a_2,a_3)$, $B = (b_1,b_2,b_3)$. *Potom je vzdialenosť bodov* A, B *(dĺžka vektora* $\overrightarrow{AB} = B - A$*):*

$$\mathrm{d}(A,B) = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(a_1-b_1)^2 + (a_2-b_2)^2 + (a_3-b_3)^2}$$

Definícia. Nech $\measuredangle\mathbf{uv} = \alpha$. Skalárnym súčinom nenulových vektorov $\mathbf{u},\mathbf{v}$ sa nazýva číslo

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\cos\alpha\,.$$

Skalárny súčin nulového a lubovoľného vektora je nula.

Poznamenajme, že ak sú vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ na seba kolmé, tak $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$ a nulový vektor budeme považovať za kolmý na každý vektor.

Veta. *Nech* $\mathbf{u} = (u_1,u_2,u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1,v_2,v_3)$. *Potom platí:*

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}^\top\,.$$

Dôkaz. Tvrdenie sa dá ľahko odvodiť z kosínusosovej vety. Keď sa umiestnia vektory $\mathbf{u},\mathbf{v}$ do spoločného počiatočného bodu, vytvoria trojuholník so stranami $\|\mathbf{u}\|, \|\mathbf{v}\|, \|\mathbf{v}-\mathbf{u}\|$. Potom podľa kosínusovej vety

$$\|\mathbf{v}-\mathbf{u}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\cos\measuredangle\mathbf{uv} = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} \implies \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \frac{1}{2}(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{v}-\mathbf{u}\|^2)$$

Preto

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \frac{1}{2}\big((u_1^2+u_2^2+u_3^2) + (v_1^2+v_2^2+v_3^2) - \big((v_1-u_1)^2 + (v_2-u_2)^2 + (v_3-u_3)^2\big)\big)$$

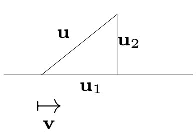
upravením tohoto výrazu dostaneme $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}^\top$. $\square$.

Skalárny súčin teraz použijeme na odvodenie vzorca na výpočet súradníc kolmého priemetu vektora $\mathbf{u}$ do smeru vektora $\mathbf{v}$ ($\mathrm{P}_\mathbf{v}\,\mathbf{u}$).

Veta. *Kolmý priemet vektora* $\mathbf{u}$ *do smeru vektora* $\mathbf{v}$ *je*

$$\mathrm{P}_\mathbf{v}\,\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}\mathbf{v}\,.$$

Dôkaz. Označíme $\mathbf{u}_1 = \mathrm{P}_\mathbf{v}\,\mathbf{u}$ a $\mathbf{u}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{u}_1$. Potom $\mathbf{u}_2 \perp \mathbf{v}$ a dostaneme



$\mathbf{u}_1 \parallel \mathbf{v} \implies \exists t \in R$ také, že $\mathbf{u}_1 = t\mathbf{v}$
$\mathbf{u}_2 \perp \mathbf{v} \implies \mathbf{u}_2\cdot\mathbf{v} = 0$. Preto
$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 = t\mathbf{v} + \mathbf{u}_2 \implies \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = (t\mathbf{v} + \mathbf{u}_2)\cdot\mathbf{v} = t\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{u}_2\cdot\mathbf{v} = t\|\mathbf{v}\|^2$
$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = t\,\|\mathbf{v}\|^2 \implies t = \dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2} \implies \mathbf{u}_1 = t\mathbf{v} = \dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}\mathbf{v}$

Definícia. *Vektorový súčin* vektorov $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ je vektor $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$.

Definíciu vektorového súčinu si môžeme prepísať v podobe determinantu:

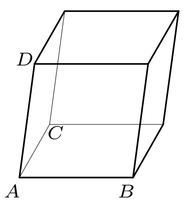
$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1) = (u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{i} + (u_3v_1 - u_1v_3)\mathbf{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{k}$$
$$= \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}\mathbf{k} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Vektorový súčin má nasledujúce vlastnosti
1. $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$
2. $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} = 0$, $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = 0$, teda $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ je vektor kolmý na oba vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$.
3. $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\| \sin\measuredangle\mathbf{uv}$ plocha rovnobežníka vytvoreného vektormi $\mathbf{u}, \mathbf{v}$).
4. Orientácia vektora $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ sa dá určiť podľa „pravidla pravej ruky:" Ak prsty pravej ruky ukazujú smer otáčania vektora $\mathbf{u}$ do $\mathbf{v}$, tak palec ukazuje orientáciu vektora $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

Definícia. *Zmiešaný súčin* vektorov $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ je číslo
$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Absolútna hodnota zmiešaného súčinu $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ je objem rovnobežnostena vytvoreného vektormi $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$.

Príklad. 1. Vypočítajte objem rovnobežnostena vytvoreného vektormi $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, ak $A = (-3, 2, 0)$, $B = (0, -3, 2)$, $C = (1, 0, -1)$, $D = (2, 1, 0)$.



$$\overrightarrow{AB} = (3, -5, 2)\,,\ \overrightarrow{AC} = (4, -2, -1)\,,\ \overrightarrow{AD} = (5, -1, 0)\,,$$
$$\overrightarrow{AD} \cdot (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 3 & -5 & 2 \\ 4 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 34$$
$$V = |\overrightarrow{AD} \cdot (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC})| = 34\,,$$

2. Vypočítajte $\|(2\vec{a} - \vec{b}) \times (3\vec{a} + 2\vec{b})\|$, ak $\|\vec{a}\| = 4$, $\|\vec{b}\| = 5$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = -12$.

$$\vec{a} \times \vec{a} = \vec{b} \times \vec{b} = \vec{0} \implies$$
$$(2\vec{a} - \vec{b}) \times (3\vec{a} + 2\vec{b}) = (2\vec{a}) \times (3\vec{a}) + (2\vec{a}) \times (2\vec{b}) + (-\vec{b}) \times (3\vec{a}) + (-\vec{b}) \times (2\vec{b}) = 4\vec{a} \times \vec{b} - 3\vec{b} \times \vec{a} = 7\vec{a} \times \vec{b}$$

Teda $\|(2\vec{a} - \vec{b}) \times (3\vec{a} + 2\vec{b})\| = 7\|\vec{a}\|\|\vec{b}\| \sin\measuredangle\vec{a}\vec{b} = 7\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\sqrt{1 - \cos^2\measuredangle\vec{a}\vec{b}}$,
$$\cos\measuredangle\vec{a}\vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|} = \frac{-12}{20} = \frac{-3}{5} \implies \|(2\vec{a} - \vec{b}) \times (3\vec{a} + 2\vec{b})\| = 7 \cdot 4 \cdot 5\sqrt{1 - \tfrac{9}{25}} = 28 \cdot 5 \cdot \tfrac{4}{5} = 112.$$

Rovnice roviny a priamky

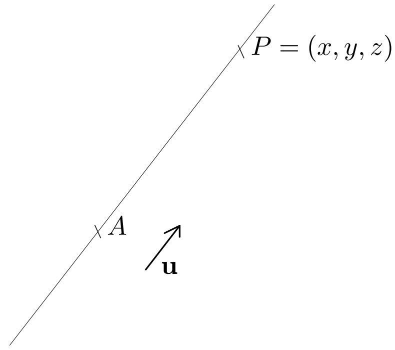
Rovina ρ určená (normálovým) vektorom $\mathbf{n} = (a, b, c) \perp \rho$ a bodom $A = (x_0, y_0, z_0) \in \rho$ má rovnicu

$$\begin{aligned}
(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (a, b, c) &= 0\,, \\
a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) &= 0 && \text{normálová rovnica,} \\
ax + by + cz + d &= 0 && \text{všeobecná rovnica.} \\
-ax_0 - by_0 - cz_0 &= d
\end{aligned}$$

Priamka p určená bodom $A = (x_0, y_0, z_0)$ a smerovým vektorom $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ má parametrickú rovnicu:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(u_1, u_2, u_3)\,, \quad t \in R\,,$$

rozpísané po súradniciach:



$$\begin{aligned}
x &= x_0 + tu_1 \\
y &= y_0 + tu_2 \\
z &= z_0 + tu_3\,, \quad t \in R
\end{aligned}$$

Vzdialenosť bodu $A = (x_0, y_0, z_0)$ od roviny $\rho\colon ax + by + cz + d = 0$ je
$\mathrm{d}(A, \rho) = \dfrac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

Príklad. Nájdite
a. rovnicu roviny, ktorá obsahuje body
$A = (3, 1, 2)$, $B = (4, 0, 3)$, $C = (-2, 5, 3)$.
b. parametrické rovnice priamky $p = AB$
c. vzialenosť bodu C od priamky p.

Riešenie:
a. $\overrightarrow{AB} = B - A = (1, -1, 1)$, $\overrightarrow{AC} = (-5, 4, 1)$. Označme $P = (x, y, z)$, potom $\overrightarrow{AP} = (x - 3, y - 1, z - 2)$ Bod P leží v rovine ABC vtedy a len vtedy, keď sú vektory $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ a $\overrightarrow{AP}$ lineárne závislé, t.j.
$\begin{vmatrix} x-3 & y-1 & z-2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$, rozvojom podľa prvého riadku dostávame normálová rovnicu roviny:

$$\begin{aligned}
\rho\colon (x-3)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - (y-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} + (z-2)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} &= 0 \\
-5(x-3) - 6(y-1) - (z-2) &= 0
\end{aligned}$$

b. $p\colon (x, y, z) = (3, 1, 2) + t(1, -1, 1), t \in R$, resp.: $x = 3 + t,$
$y = 1 - t,$
$z = 2 + t,\ t \in R$

c. Na priamke p nájdeme bod $P = (3 + t, 1 - t, 2 + t)$ tak, aby bol vektor $\overrightarrow{PC} \perp \overleftarrow{AB}$:

$$C - P = (-2, 5, 3) - (3 + t, 1 - t, 2 + t) = (-5 - t, 4 + t, 1 - t) \perp (1, -1, 1) \implies -5 - t - 4 - t + 1 - t = 0$$

$$-8 - 3t = 0 \implies t = -\frac{8}{3}\,,\ \text{teda } C - P = \left(-5 + \frac{8}{3}, 4 - \frac{8}{3}, 1 + \frac{8}{3}\right) \implies$$

$$\mathrm{d}(C, p) = \|\overrightarrow{PC}\| = \frac{1}{3}\sqrt{7^2 + 4^2 + 11^2} = \frac{1}{3}\sqrt{49 + 16 + 121} = \frac{1}{3}\sqrt{186}$$