Pr1A. [14 bodov] $f(x) = 2x^5 + x^3 + 2x^2 + x + 2,\ g(x) = x^4 + x^3 + x + 2 \in P(Z_3)$.
Určte $a(x), b(x) \in P(Z_3)$, pre ktoré $\quad \gcd(f,g) = a(x)f(x) + b(x)g(x)$

$$(2x^5 + x^3 + 2x^2 + x + 2) : (x^4 + x^3 + x + 2) = 2x + 1$$
$$-\underline{(2x^5 + 2x^4 + 2x^2 + x)}$$
$$x^4 + x^3 + 2$$
$$-\underline{(x^4 + x^3 + x + 2)}$$
$$2x = f_2 = f - (2x+1)g$$
$$(x^4 + x^3 + x + 2) : (2x) = 2x^3 + 2x^2 + 2$$
$$-\underline{x^4}$$
$$x^3 + x + 2$$
$$-\underline{x^3}$$
$$x + 2$$
$$-\underline{x}$$
$$2 = \gcd(f,g) = g(x) - (2x^3 + 2x^2 + 2)f_2 = g(x) - (2x^3 + 2x^2 + 2)[f(x) - (2x+1)g(x)]$$
$$\gcd(f,g) = \underbrace{(x^3 + x^2 + 1)}_{a(x)} f(x) + \underbrace{(x^4 + 2x^2 + x)}_{b(x)} g(x)$$

Pr1B. [14] $f(x) = 2x^5 + x^4 + 2x^2 + x + 2,\ g(x) = x^4 + x^3 + x + 2 \in P(Z_3)$.
Určte $a(x), b(x) \in P(Z_3)$, pre ktoré $\quad \gcd(f,g) = a(x)f(x) + b(x)g(x)$

$$(2x^5 + x^4 + 2x^2 + x + 2) : (x^4 + x^3 + x + 2) = 2x + 2$$
$$-\underline{(2x^5 + 2x^4 + 2x^2 + x)}$$
$$2x^4 + 2$$
$$-\underline{(2x^4 + 2x^3 + 2x + 1)}$$
$$x^3 + x + 1 = f_2 = f - (2x+2)g = f + (x+1)g$$
$$(x^4 + x^3 + x + 2) : (x^3 + x + 1) = x + 1$$
$$-\underline{(x^4 + x^2 + x)}$$
$$x^3 + 2x^2 + 2$$
$$-\underline{(x^3 + x + 1)}$$
$$2x^2 + 2x + 1 = f_3 = g - (x+1)f_2$$
$$(x^3 + x + 1) : (2x^2 + 2x + 1) = 2x + 1$$
$$-\underline{(x^3 + x^2 + 2x)}$$
$$2x^2 + 2x + 1, \text{zv. } 0 \implies \gcd(f,g) = f_3$$
$$= g - (x+1)f_2 = g - (x+1)[f + (x+1)g] = (2x+2)f + [1 - (x+1)^2]g$$
$$= \underbrace{(2x+2)}_{a(x)} f(x) + \underbrace{(2x^2 + x)}_{b(x)} g(x)$$

Pr.2A [12 bodov] $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&2\\0&2&2\end{pmatrix}$. Vypočítajte

a) trace$A$, b) vlastné čísla matice A, c) maticu P a diagonálnu maticu D, pre ktorú $A=PDP^\top$.

a) trace$A=5$, b) Očividne $\lambda_1=1$ aj $\lambda_2=0$ sú vlastné čísla matice A, teda $\lambda_3=4$, prípadne počítame $\begin{vmatrix}1-\lambda&0&0\\0&2-\lambda&2\\0&2&2-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(1-\lambda)(4-\lambda)$ a dostaneme $\sigma(A)=(1,0,4)$.

c) vlastné vektory: pre $\lambda_1=1$ je $\mathbf{v}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, pre $\lambda_2=0$ $\quad A-\lambda_2 I=A\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$,

$\lambda_3=4 \qquad A-\lambda_3 I=\begin{pmatrix}-3&0&0\\0&-2&2\\0&2&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $\|\mathbf{v}_2\|=\|\mathbf{v}_3\|=\sqrt{2}$, $\|\mathbf{v}_1\|=1$.

$P=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}\\0&-1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}\end{pmatrix}, \qquad D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&4\end{pmatrix}$

Pr.2B [12 bodov] $A=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&2\\0&2&2\end{pmatrix}$. Vypočítajte

a) trace$A$, b) vlastné čísla matice A, c) maticu P a diagonálnu maticu D, pre ktorú $A=PDP^\top$.

a) trace$A=3$, b) Očividne $\lambda_1=-1$ aj $\lambda_2=0$ sú vlastné čísla matice A, teda $\lambda_3=4$, prípadne počítame $\begin{vmatrix}-1-\lambda&0&0\\0&2-\lambda&2\\0&2&2-\lambda\end{vmatrix}=\lambda(-1-\lambda)(\lambda-4)$ a dostaneme $\sigma(A)=(-1,0,4)$.

c) vlastné vektory: pre $\lambda_1=-1$ je $\mathbf{v}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, pre $\lambda_2=0$ $\quad A-\lambda_2 I=A\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$,

$\lambda_3=4 \qquad A-\lambda_3 I=\begin{pmatrix}-5&0&0\\0&-2&2\\0&2&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $\|\mathbf{v}_2\|=\|\mathbf{v}_3\|=\sqrt{2}$, $\|\mathbf{v}_1\|=1$.

$P=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}\\0&-1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}\end{pmatrix}, \qquad D=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&0\\0&0&4\end{pmatrix}$

Pr3A) [14]
Napíšte maticu lineárneho operátora $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vzhľadom na štandardné bázy, ak T zobrazí bod A na bod s ním súmerne združený podľa roviny $\rho \equiv 2x + 2y + z = 0$.
Stĺpce matice $T_{\mathcal{E}}$ tvoria obrazy štandardnej bázy.

$\mathbf{n} = (2,2,1) \perp \rho$, $T(1,0,0) = (x,y,z) \implies (x-1,y,z) = t(2,2,1) \implies T(1,0,0) = (1+2t, 2t, t)$
$\mathbf{e}_1 = A = (1,0,0), B = (x,y,z)$ $\mathrm{dist}(A,\rho) = \mathrm{dist}(B,\rho) \implies$
$2 = |2(1+2t) + 2\cdot 2t + t| = |2+9t| \implies 2 + 9t = \pm 2$,
$2 + 9t = 2 \implies t = 0$ zodpovedá bodu A,
$2 + 9t = -2 \implies t = -\frac{4}{9} \implies 1 + 2t = \frac{9-8}{9} = \frac{1}{9}$, $2t = -\frac{8}{9}$, t.j $B = \frac{1}{9}(1,-8,-4)$

$$T_{\mathcal{E}} = P \implies P_{*1} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Podobný postup zopakujeme pre body $T\mathbf{e}_2 = T(0,1,0)$ a $T\mathbf{e}_3 = T(0,0,1)$ a dostaneme
$T(0,1,0) = (x,y,z) \implies (x, y-1, z) = t(2,2,1) \implies 9t + 2 = -2 \implies t = -\frac{4}{9}$,
$x = 2t = -\frac{8}{9}$, $y = \frac{1}{9}$, $z = t = -\frac{4}{9}$.
$T(0,0,1) = (x,y,z) \implies x = -\frac{4}{9}, y = -\frac{4}{9}, z = \frac{7}{9}$.

$$T_{\mathcal{E}} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -8 & -4 \\ -8 & 1 & -4 \\ -4 & -4 & 7 \end{pmatrix}$$

Pr3B)
Napíšte maticu lineárneho operátora $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vzhľadom na štandardné bázy, ak T zobrazí bod A na bod s ním súmerne združený podľa roviny $\rho \equiv 2x + 2y - z = 0$.

Maticu môžeme vypočítať podobne ako v Pr3A. Ukážeme si ešte iný postup.
Pre tento operátor je ľahké nájsť bázu $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ zloženú z vlastných vektrov:
$\mathbf{b}_1 = \mathbf{n} = (2,2,-1) \perp \rho \implies T\mathbf{b}_1 = -\mathbf{b}_1$, príslušné vlastné číslo je -1.
Každý vektor $\mathbf{u} \parallel \rho$, resp. bod $A \in \rho$ sa zobrazí na seba (je vlastný s vlastným číslom $=1$). Zvolíme napr. $\mathbf{b}_2 = (1,-1,0)$ a $\mathbf{b}_3 = (0,1,2)$.

$$T_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \text{ak } P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{tak } T_{\mathcal{E}} = PT_{\mathcal{B}}P^{-1}.$$

Rozvojom podľa R_3: $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -1 - 8 = -9$, $P^{-1} = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -5 & 4 & -2 \\ -1 & -1 & -4 \end{pmatrix}$

$$T_{\mathcal{E}} = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -5 & 4 & -2 \\ -1 & -1 & -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -5 & 4 & -2 \\ -1 & -1 & -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -8 & 4 \\ -8 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\underline{T_{\mathcal{E}} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -8 & 4 \\ -8 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \end{pmatrix}}$$

Pr4A [14] $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,\ T(x_1,x_2,x_3)=(2x_1-x_2+x_3\ ,\ 2x_1+2x_2-x_3\ ,\ 4x_1+x_2)$, $\mathcal{B}=\{\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3\},\ \mathbf{b}_1=(0,1,1),\ \mathbf{b}_2=(1,0,0),\ \mathbf{b}_3=(0,2,1)$. $\mathcal{E}$ je štandardná báza. Určte
a) matice $T_{\mathcal{E}\mathcal{E}}$, $T_{\mathcal{E}\mathcal{B}}$, $T_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$
b) bázu a dimenziu jadra a dimenziu oboru hodnôt operátora T.

a) $T\mathbf{b}_1=T(0,1,1)=(0,1,1),\ T\mathbf{b}_2=T(1,0,0)=(2,2,4),\ T\mathbf{b}_3=T(0,2,1)=(-1,3,2)$,
$T\mathbf{e}_1=T(1,0,0)=(2,2,4),\ T\mathbf{e}_2=T(0,1,0)=(-1,2,1), T\mathbf{e}_3=T(0,0,1)=(1,-1,0)$.

$$\begin{array}{c}\quad\mathcal{B}\qquad\qquad T\mathcal{E}\qquad\qquad T\mathcal{B}\end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0&1&0&2&-1&1&0&2&-1\\ 1&0&2&2&2&-1&1&2&3\\ 1&0&1&4&1&0&1&4&2\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1&0&1&4&1&0&1&4&2\\ 0&1&0&2&-1&1&0&2&-1\\ 0&0&1&-2&1&-1&0&-2&1\end{array}\right)\sim$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1&0&0&6&0&1&1&6&1\\ 0&1&0&2&-1&1&0&2&-1\\ 0&0&1&-2&1&-1&0&-2&1\end{array}\right)$$

$$T_{\mathcal{E}\mathcal{E}}=\begin{pmatrix}2&-1&1\\2&2&-1\\4&1&0\end{pmatrix},\ T_{\mathcal{E}\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}6&0&1\\2&-1&1\\-2&1&-1\end{pmatrix}\ T_{\mathcal{B}\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}1&6&1\\0&2&-1\\0&-2&1\end{pmatrix}$$

b) $\begin{pmatrix}2&-1&1\\2&2&-1\\4&1&0\end{pmatrix}\sim_{r_3-r_2}\begin{pmatrix}2&-1&1\\2&2&-1\\2&-1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&-1&1\\0&3&-2\\0&0&0\end{pmatrix}$, $x_3=3t,\ x_2=2t,\ x_1=-\frac{1}{2}t$

$\operatorname{Ker}T=\{(-\frac{1}{2}t,2t,3t);\ t\in\mathbb{R}\}$, Báza: $\{(-\frac{1}{2},2,3)\}$, $\dim\operatorname{Ker}T=1$, $\dim\operatorname{Ran}T=3-1=2$.

Pr4B [14] $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,\ T(x_1,x_2,x_3)=(2x_1-x_2+x_3\ ,\ 2x_1+2x_2-x_3\ ,\ 4x_1+x_2)$, $\mathcal{B}=\{\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3\},\ \mathbf{b}_1=(0,1,1),\ \mathbf{b}_2=(0,2,1),\ \mathbf{b}_3=(1,0,0)$. $\mathcal{E}$ je štandardná báza. Určte
a) matice $T_{\mathcal{E}\mathcal{E}}$, $T_{\mathcal{E}\mathcal{B}}$, $T_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$
b) bázu a dimenziu jadra a dimenziu oboru hodnôt operátora T.

a) $T\mathbf{b}_1=T(0,1,1)=(0,1,1), T\mathbf{b}_2=T(0,2,1)=(-1,3,2)\ T\mathbf{b}_3=T(1,0,0)=(2,2,4),\ ,$
$T\mathbf{e}_1=T(1,0,0)=(2,2,4),\ T\mathbf{e}_2=T(0,1,0)=(-1,2,1), T\mathbf{e}_3=T(0,0,1)=(1,-1,0)$.

$$\begin{array}{c}\quad\mathcal{B}\qquad\qquad T\mathcal{E}\qquad\qquad T\mathcal{B}\end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0&0&1&2&-1&1&0&-1&2\\ 1&2&0&2&2&-1&1&3&2\\ 1&1&0&4&1&0&1&2&4\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1&1&0&4&1&0&1&2&4\\ 0&1&0&-2&1&-1&0&1&-2\\ 0&0&1&2&-1&1&0&-1&2\end{array}\right)\sim$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1&0&0&6&0&1&1&1&6\\ 0&1&0&-2&1&-1&0&1&-2\\ 0&0&1&2&-1&1&0&-1&2\end{array}\right)$$

$$T_{\mathcal{E}\mathcal{E}}=\begin{pmatrix}2&-1&1\\2&2&-1\\4&1&0\end{pmatrix},\ T_{\mathcal{E}\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}6&0&1\\-2&1&-1\\2&-1&1\end{pmatrix}\ T_{\mathcal{B}\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}1&1&6\\0&1&-2\\0&-1&2\end{pmatrix}$$

b) $\begin{pmatrix}2&-1&1\\2&2&-1\\4&1&0\end{pmatrix}\sim_{r_3-r_2}\begin{pmatrix}2&-1&1\\2&2&-1\\2&-1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&-1&1\\0&3&-2\\0&0&0\end{pmatrix}$, $x_3=3t,\ x_2=2t,\ x_1=-\frac{1}{2}t$

$\operatorname{Ker}T=\{(-\frac{1}{2}t,2t,3t);\ t\in\mathbb{R}\}$, Báza: $\{(-\frac{1}{2},2,3)\}$, $\dim\operatorname{Ker}T=1$, $\dim\operatorname{Ran}T=3-1=2$.