

DISKRÉTNÁ MATEMATIKA A LOGIKA – PRÍKLADY

Znakom (*) sú označené príklady, ktoré sa môžu javiť ako „ťažšie“ tesne po príslušnej prednáške. Mali by ste však byť schopní ich zvládnuť s istým časovým odstupom, po diskusii s kolegami alebo s prednášajúcim/cvičiacim a podobne.

2. RELÁCIE

- (1) Nech M je množina všetkých študentov tohto predmetu. Nech ρ je relácia na množine M definovaná takto:

$$x\rho y :\iff x \text{ a } y \text{ majú aspoň jedno písmeno v mene spoločné.}$$

Zistite, či ρ je reflexívna, symetrická, tranzitívna.

- (2) Nech P je množina všetkých priamok v rovine. Zistite, či kolmosť priamok (\perp) je reflexívna, symetrická, tranzitívna relácia.
(3) Nech P je množina všetkých priamok v rovine. Zistite, či rovnobežnosť priamok (\parallel) je reflexívna, symetrická, tranzitívna relácia.
(4) Nech $\sim_{\mathbb{Q}}$ je relácia na \mathbb{R} daná predpisom

$$a \sim_{\mathbb{Q}} b :\iff a \ominus b \in \mathbb{Q}.$$

Zistite, či $\sim_{\mathbb{Q}}$ je reflexívna, symetrická, tranzitívna relácia. Aké vlastnosti \mathbb{Q} ste použili? Nájdite nejakú inú množinu $A \subseteq \mathbb{R}$ ako \mathbb{Q} pre ktorú dostaneme rovnaké vlastnosti (R,S,T) analogicky definovanej relácie \sim_A .

- (5) Nech $2^{\mathbb{N}}$ je množina všetkých podmnožín N . Uvažujme takéto relácie Θ_i na $2^{\mathbb{N}}$:

- (a) $A\Theta_1 B$ práve vtedy, keď $A \cap B = \emptyset$,
(b) $A\Theta_2 B$ práve vtedy, keď $A \cap B \neq \emptyset$,
(c) $A\Theta_3 B$ práve vtedy, keď $A \cup B$ je nekonečná.
(d) $A\Theta_4 B$ práve vtedy, keď $A \cap B$ je konečná.
(e) $A\Theta_5 B$ práve vtedy, keď $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ je konečná.
(f) $A\Theta_6 B$ práve vtedy, keď $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ obsahuje iba párne čísla.

O každej z týchto relácií dokážte alebo vyvráťte každú z vlastností reflexívnosť, symetrickosť, tranzitivita.

- (6) Dokážte, že relácia ρ na nejakej množine A je symetrická práve vtedy, keď $\rho = \rho^{-1}$.
(7) Dokážte, že relácia ρ na nejakej množine A je reflexívna práve vtedy, keď $id_A \subseteq \rho$.
(8) (*) Nech A je množina. Keďže \emptyset je podmnožina $A \times A$, \emptyset je relácia na A . Zistite, či \emptyset je reflexívna, symetrická, tranzitívna relácia na A .
(9) (*) Nech A, B sú nejaké dve rôzne množiny, nech Θ je podmnožinou $A \times A$ aj $B \times B$. Potom Θ je zrejme zároveň reláciou na A aj na B . Ktoré z nasledujúcich tvrdení sú za týchto predpokladov pravdivé a ktoré nie?
(a) Ak Θ je reflexívna relácia na A , potom Θ je reflexívna relácia na B .
(b) Ak Θ je symetrická relácia na A , potom Θ je symetrická relácia na B .
(c) Ak Θ je tranzitívna relácia na A , potom Θ je tranzitívna relácia na B .

- (10) Pre každý riadok tabuľky zostrojte reláciu s danými vlastnosťami na množine $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

reflexívna	symetrická	tranzitívna
áno	áno	áno
áno	nie	áno
áno	áno	nie
nie	áno	áno
nie	nie	áno
nie	nie	nie

3. EKVIVALENCIE A ROZKLADY

- (1) Nech \sim je relácia na \mathbb{R} daná predpisom

$$x \sim y : \Leftrightarrow \sin(x) = \sin(y).$$

Dokážte, že \sim je ekvivalencia a napíšte dve rôzne triedy ekvivalencie \sim .

- (2) Nech O je fixný bod v rovine. Nech \sim je relácia ekvivalencie na všetkých bodoch v rovine daná predpisom

$$A \sim B : \Leftrightarrow \text{úsečky } AO \text{ a } BO \text{ sú rovnako dlhé.}$$

Načrtnite triedu ekvivalencie nejakého bodu $C \neq O$.

- (3) (*) Nech $A = \mathbb{R}^2$. Definujme na A ¹ reláciu \sim takto:

$$\mathbf{x} \sim \mathbf{y} : \Leftrightarrow \text{existuje } \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0 \text{ také, že } \mathbf{x} = \alpha \mathbf{y}$$

Dokážte, že \sim je ekvivalencia. Ako vyzerá príslušný rozklad \mathbb{R}^2 ? Nakreslite ho.

- (4) Nech $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Uvažujme rozklad $\{\{1, 2, 3\}, \{4, 5\}, \{6\}\}$. Nájdite ekvivalenciu prislúchajúcu tomuto rozkladu.

- (5) Nájdite všetky ekvivalencie na množine $\{1, 2, 3\}$.

- (6) (*) Koľko je všetkých ekvivalencií na n -prvkovej množine?

- (7) Nech \mathbb{M}_n je množina všetkých reálnych regulárnych štvorcových matíc $n \times n$. Definujme na \mathbb{M}_n reláciu (nazývanú *podobnosť*) matíc takto:

$$A \sim B : \Leftrightarrow \text{existuje regulárna matica } P \text{ taká, že } A = PBP^{-1}$$

Dokážte, že \sim je ekvivalencia.²

- (8) Dokážte, že $\sim \subseteq (0, \infty) \times (0, \infty)$ daná predpisom

$$a \sim b : \Leftrightarrow \frac{a^2}{b^2} \in \mathbb{Q}$$

je ekvivalencia. Charakterizujte prvky patriace do $[\sqrt{2}]_{\sim}$. Nájdite tri prvky patriace do $[\pi]$.

¹Uvedomte si, že $\sim \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, teda \sim je relácia na množine dvojíc reálnych čísel.

²Pomôcka: $(PQ)^{-1} = Q^{-1}P^{-1}$