

DISKRÉTNÁ MATEMATIKA A LOGIKA – PŘÍKLADY

Znakom (*) sú označené príklady, ktoré sa môžu javiť ako „ťažšie“ tesne po príslušnej prednáške. Mali by ste však byť schopní ich zvládnuť s istým časovým odstupom, po diskusii s kolegami alebo s prednášajúcim/cvičiacim a podobne.

4. OPERÁCIE NA MNOŽINE (ČASŤ I.)

(1) Nakreslite Cayleyho tabuľku pre nasledujúce operácie.

(a) Operácia $*$ na množine $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ daná predpisom

$$x * y := \min(4, x + y).$$

(b) Operácia násobenia na množine komplexných čísel $1, -1, i, -i$.

(c) Operácia zjednotenia na množine všetkých podmnožín množiny $\{1, 2\}$.

Operácia $*$ na množine $\{1, 2, 3, 4\}$ daná predpisom

$$x * y := \text{zvyšok po delení } x.y \text{ číslom } 5.$$

(d) Operácia $*$ na množine $\{1, 2, 3, 4\}$ daná predpisom

$$x * y := \text{zvyšok po delení } x.y+1 \text{ číslom } 5.$$

(e) Operácia $*$ na množine $\{1, 2, 3, 4\}$ daná predpisom

$$x * y := \text{zvyšok po delení } x.(y+1) \text{ číslom } 5.$$

(2) Pre každú operáciu z predošlého príkladu zistite, či je operácia komutatívna, či má jednotkový prvok a či je (*) asociatívna.

(3) Koľko je všetkých binárnych operácií na n -prvkovej množine?

(4) (*) Koľko je všetkých komutatívnych binárnych operácií na n -prvkovej množine?

(5) Zistite, či je operácia $*$ na \mathbb{R} daná daným predpisom komutatívna, asociatívna a nájdite jednotkový prvok (ak existuje). Svoju odpoveď dokážte.¹

(a) $a * b = |a + b|$

(b) $a * b = |a.b|$

(c) $a * b = a + b + 1$

(d) $a * b = a^2 + b^2$

(e) $a * b = \sin(a + b)$

(f) $a * b = 1$

(6) Nech \mathcal{P} je množina všetkých reálnych polynómov. Nech \heartsuit je binárna operácia na \mathcal{P} daná predpisom $\mathbf{p} \heartsuit \mathbf{q} = (\mathbf{p} + \mathbf{q})'$, kde $'$ označuje deriváciu. Zistite, či je operácia \heartsuit komutatívna a asociatívna a či má jednotkový prvok.

(7) Nech P je množina všetkých bodov v rovine. Nech \odot je binárna operácia na P daná predpisom

$$A \odot B = \text{stred úsečky } AB.$$

Zistite, či \odot je komutatívna, asociatívna a nájdite jednotkový prvok (ak existuje).

¹Ak tvrdíte, že neexistuje jednotkový prvok, aj to musíte dokázať!

- (8) Nech A je množina, označme 2^A množinu všech podmnožin A .
- (a) Najdte jednotkový prvek vzhľadom na operáciu \cap na 2^A .
 - (b) Najdte jednotkový prvek vzhľadom na operáciu \cup na 2^A .
 - (c) Nech \div je operácia na 2^A daná predpisom

$$X \div Y = (X \cap Y^C) \cup (X \cap Y^C).$$

- ($X \div Y$ sa volá *symetrická diferenciac množín* X, Y) Dokážte, že \div je komutatívna a asociatívna operácia a zistite, či má jednotkový prvek.
- (d) Pre $A = \{1, 2\}$ nakreslite Cayleyho tabuľku \div .