

DISKRÉTNÁ MATEMATIKA A LOGIKA – PRÍKLADY

1. MNOŽINY

Znakom (*) sú označené príklady, ktoré sa môžu javiť ako „ťažšie“ tesne po príslušnej prednáške. Mali by ste však byť schopní ich zvládnuť s istým časovým odstupom, po diskusii s kolegami alebo s prednášajúcim/cvičiacim a podobne.

- (1) (*) Nech A, B sú prázdne množiny. Dokážte, že $A = B$. (Musíte použiť definíciu rovnosti množín z prednášky!)
- (2) Napíšte množiny
 - (a) $\{1, 2, 3\} \cup \{3, 4, 5\}$
 - (b) $\{1, 2, 3\} \cap \{3, 4, 5\}$
 - (c) $\{1, 2, 3\} \cap \{4, 5\}$
 - (d) $\{1, 2, 3\} \cap \emptyset$
 - (e) $\emptyset \cap \emptyset$
 - (f) $\emptyset \cup \{1, 2, 3\}$
 - (g) $\emptyset \cup \emptyset$
 - (h) $\langle 1, 2 \rangle \cap \langle \frac{1}{2}, \infty \rangle \leftarrow$ reálne intervaly.
 - (i) $\langle 1, 2 \rangle \cap \mathbb{Z}$
 - (j) $\langle 1, 2 \rangle \cap \mathbb{Z}$
 - (k) $\langle 1, 2 \rangle \cup \langle \frac{1}{2}, \infty \rangle$
 - (l) $\mathbb{N} \cap \mathbb{R}$
 - (m) $\mathbb{N} \cup \mathbb{R}$.

Presvedčte sa striktne v zmysle definície \cup, \cap , že vaša odpoveď je správna.

- (3) Pomocou zápisu typu $\{ \dots : \dots \}$ zapíšte nasledujúce množiny.
 - (a) Množina všetkých racionálnych čísel, ktorých druhá odmocnina je iracionálna.
 - (b) Množina všetkých spoločných deliteľov čísel 12345 a 543210. (fakt, že n je deliteľom m značíme $n|m$).
 - (c) Množina všetkých podmnožín prirodzených čísel, ktoré obsahujú 3.
 - (d) Množina všetkých komplexných čísel, ktorých absolútna hodnota je 1.
 - (e) Guľu v \mathbb{R}^3 s polomerom 1 a stredom $(1, 1, 1)$.
 - (f) Sféru v \mathbb{R}^3 s polomerom 1 a stredom $(1, 1, 1)$.
- (4) Nech A, B sú množiny, nech $A \subseteq B$. Čomu je rovné $A \cup B$? A čomu $A \cap B$? Dokážte, že vaša odpoveď je správna.
- (5) Nech A, B sú množiny.
 - (a) $(A \cap B) \cup A = ?$
 - (b) $(A \cup B) \cap A = ?$Dokážte, že vaša odpoveď je správna.
- (6)
 - (a) $\langle 1, 2 \rangle \setminus \langle \frac{1}{2}, 3 \rangle = ?$
 - (b) $\langle \frac{1}{2}, 3 \rangle \setminus \{1, 2\} = ?$
 - (c) $A \setminus A = ?$; A je množina.
- (7) $(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = ?$; A, B sú množiny.

- (8) Nech A, B sú konečné množiny. Nech A má n prvkov (značíme $|A| = n$) a nech $|B| = m$.
- Aké sú všetky možné hodnoty $|A \cup B|$?
 - Aké sú všetky možné hodnoty $|A \cap B|$?
 - Ako sa zmení odpoveď na (a), ak navyše predpokladáme, že $A \cap B = \emptyset$?
 - Ako sa zmení odpoveď na (b), ak navyše predpokladáme, že $|A \cup B| = 5$?
 - Pre každé dve konečné množiny A, B je štvorica čísel $|A|, |B|, |A \cap B|, |A \cup B|$ v istom peknom vzťahu. Objavte tento vzťah a dokážte ho.
- (9) Napíšte všetky podmnožiny množiny $\{1, 2, 3\}$. Nájdite také $A, B \subseteq \{1, 2, 3\}$, že neplatí ani $A \subseteq B$, ani $B \subseteq A$.
- (10) Koľko je všetkých podmnožín n -prvkovej množiny?
- (11) Nech A je konečná množina, nech B je množina, nech f je zobrazenie $f : A \rightarrow B$.
- Aký je vzťah medzi $|A|$ a $|f(A)|$?
 - Čo môžeme usúdiť o zobrazení f , z predpokladu $|A| = |f(A)|$?
- (12) Nech A je konečná množina, nech $f : A \rightarrow A$. Dokážte, že f je surjektívne práve vtedy, keď f je injektívne.
- (13) Zistite, či platí:
- | | | |
|-----------------------------------|------------------------------------|-------------------------------------|
| (a) $\{1\} \in \{1, 2\}$ | (f) $1 \subseteq \{1, 2\}$ | (k) $\emptyset \subseteq \{1, 2\}$ |
| (b) $\{1\} \subseteq \{1, 2\}$ | (g) $\{1\} \in \{\{1\}, 2\}$ | (l) $\emptyset \subseteq \emptyset$ |
| (c) $\{1, 2\} \in \{1, 2\}$ | (h) $\{1\} \subseteq \{\{1\}, 2\}$ | (m) $\emptyset \in \emptyset$ |
| (d) $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2\}$ | (i) $\{2\} \subseteq \{\{1\}, 2\}$ | |
| (e) $1 \in \{1, 2\}$ | (j) $\emptyset \in \{1, 2\}$ | |
- Svoje odpovede zdôvodnite. Nájdite študenta, ktorý má na niektoré z (a)-(m) iný názor a pohádajte sa s ním o tom.
- (14) Nájdite (v univerze \mathbb{R}):
- $\langle 1, 2 \rangle^C$
 - $(1, 2)^C$
 - \mathbb{R}^C
 - \emptyset^C
- (15) Vypočítajte:
- $\{1, 2\} \times \{1, 3\}$
 - $\{1, 3\} \times \{1, 2\}$
 - $(\{1, 2\} \times \{1, 3\}) \cap (\{1, 3\} \times \{1, 2\})$
- (16) Vypočítajte $(\{1, 2\} \times \{1, 3\}) \cup (\{1, 3\} \times \{1, 2\})$. Je táto množina kartézskym súčinom nejakých dvoch množín? Prečo?
- (17) (*) Nech A, B sú konečné množiny také, že $|A \times B|$ je prvočíslo. Čo viete z toho usúdiť o množinách A, B ? Môže sa stať, že $A = B$? Prečo?