Skalárne a vektorové pole. Krivkové a plošné integrály.

1. Nech $U(x,y,z)=x^2y^2z^3$, $\mathbf{F}(x,y,z)=x^2y\mathbf{i}+xy^2z\mathbf{j}-yz^2\mathbf{k}$. Vypočítajte
   a) $\nabla^2 U=\nabla(\nabla \mathbf{U})$ $[2z(y^2z^2+x^2z^2+3x^2y^2)]$
   b) $\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{F}$ $[2(y+zy, x+xz+z, xy+y)]$
   c) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{F}$ $[2(yz, z-x, xy)]$
2. Nech $\mathbf{u}(x,y,z)=xy\mathbf{j}+xz\mathbf{k}$ a $\mathbf{v}(x,y,z)=xy\mathbf{i}+yz\mathbf{k}$. Overte platnosť rovnosti:

   a) $\operatorname{div}(\mathbf{u}\times\mathbf{v})=\mathbf{v}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{u}-\mathbf{u}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{v}$
3. Ak $\mathbf{r}=(x,y,z)$ a $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ sú konštantné vektory, ukážte, že
   a) $\nabla\times\mathbf{r}=\mathbf{0}$
   b) $(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{r}=\mathbf{a}$
   c) $\nabla\times[(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})\mathbf{b}-(\mathbf{b}\cdot\mathbf{r})\mathbf{a}]=2(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$
4. Určte konštanty $a,b,c\in R$, pre ktoré $\operatorname{rot}[(4x+az^3)\mathbf{i}+(bx^2+3z)\mathbf{j}+(6xz^2+cy)\mathbf{k}]=\mathbf{0}$. $[a=2, b=0, c=3]$
5. Vypočítajte krivkové integrály
   a) $\int_K y\,\mathrm{d}s$, K je parabola $y=2\sqrt{x}$ od bodu $A=[3,2\sqrt{3}]$, po bod $B=[24,4\sqrt{6}]$. [156]
   b) $\int_K 2xy\,\mathrm{d}x+(x^2-y^2)\,\mathrm{d}y$, K je oblúk kružnice $x^2+y^2=1$ v prvom kavadrante od $[1,0]$ po $[0,1]$. $[-1/3]$
   c) $\int_K \mathbf{F}\,\mathrm{d}\mathbf{r}$, kde $\mathbf{F}=(2yz+3x^2, y^2+3xz, 2z^2+6xy)$, K má parametrické vyjadrenie $x=t^3, y=t^2, z=t$ od bodu $[0,0,0]$ po bod $[1,1,1]$. [5]
   d) $\int_K x^2\,\mathrm{d}s$, kde $K=\{(x,\ln x)\colon x\in\langle 1,2\rangle\}$. $[\frac{1}{3}(5\sqrt{5}-2\sqrt{2})]$
   e) $\int_K xy\,\mathrm{d}s$, K je časť elipsy $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$, $x\ge 0$, $y\ge 0$. [38/5]
   f) $\int_K y^2\,\mathrm{d}s$, K je oblúk cykloidy $[t-\sin t, 1-\cos t]$, $t\in\langle 0,2\pi\rangle$. [256/15]
   g) $\int_K \dfrac{z^2}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s$, $K=[\cos t,\sin t,2t]$, $t\in\langle 0,2\pi\rangle$. $[32\pi\sqrt{5}/3]$
6. $\mathbf{F}=(2y+3)\mathbf{i}+xz\mathbf{j}+(yz-x)\mathbf{k}$. Vypočítajte $\int_K \mathbf{F}\,\mathrm{d}\mathbf{r}$, ak K je orientovaná krivka
   a) $x=2t^2$, $y=t$, $z=t^3$ od $t=0$ po $t=1$. [288/35]
   b) K sa skladá z troch úsečiek od $[0,0,0]$ po $[0,0,1]$, od $[0,0,1]$ po $[0,1,1]$ a od $[0,1,1]$ po $[2,1,1]$ [10]
   c) úsečka od $[0,0,0]$ po $[2,1,1]$ [8]
7. Ukážte, že silové pole $\mathbf{F}=(y^2\cos x+z^3)\mathbf{i}+(2y\sin x-4)\mathbf{j}+(3xz^2+z)\mathbf{k}$ je konzervatívne (t.j. potenciálové) a potom vypočítajte prácu pri pohybe od bodu $[0,1,-1]$ po $[\pi/2,-1,2]$. $[\frac{21}{2}+4\pi]$
8. Vypočítajte $\int_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$, ak
   a) $f(x,y,z)=z$, $S\colon \mathbf{r}=(u\cos v)\mathbf{i}+(u\sin v)\mathbf{j}+v\mathbf{k}$, $(u,v)\in\langle 0,1\rangle\times\langle 0,2\pi\rangle$. $[\pi^2(\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2}))]$
   b) $f(x,y,z)=z$, S je časť kužeľovej plochy $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $1\le z\le 2$. $[14\sqrt{2}/3]$
   c) $f(x,y,z)=\frac{1}{(1+x+y)^2}$, S je povrch štvorstena $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$, $x+y+z\le 1$. $[(3-\sqrt{3})/2+(\sqrt{3}-1)\ln 2]$
   d) $f(x,y,z)=\sqrt{4-x^2-y^2}$, S je plocha určená rovnicou $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$. $[4\pi]$
   e) $f(x,y,z)=x^2+y^2$, S je plocha z príkladu d. $[32\pi/3]$
9. Vypočítajte $\int_S \mathbf{F}(x,y,z)\,\mathrm{d}\mathbf{r}$, ak $\mathbf{F}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ a S je
   a) časť plochy $\mathbf{r}=u\mathbf{i}+v\mathbf{j}+(uv+1)\mathbf{k}$, $(u,v)\in M=\langle 0,1\rangle\times\langle 0,1\rangle$, orientovanej tak, že normálový vektor $\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}$ zviera s vektorom $\mathbf{k}$ ostrý uhol. [3/4]
   b) časť paraboloidu $\mathbf{r}=u\mathbf{i}+v\mathbf{j}+(u^2+v^2)\mathbf{k}$, $u^2+v^2\le 1$ orientovaná tak, že normálový vektor zviera s vektorom $\mathbf{k}$ tupý uhol. $[-\pi/2]$
   c) povrch kocky $\langle 0,1\rangle\times\langle 0,1\rangle\times\langle 0,1\rangle$ orientovaný normálou von. [24]
   d) guľová plocha $x^2+y^2+z^2=4$ orientovaná normálou von. $[32\pi]$
10. Vypočítajte integrály funkcie $\mathbf{F}(x,y)=\big(P(x,y),Q(x,y)\big)$ pozdĺž krivky K.
    a) $P(x,y)=y^2$, $Q(x,y)=x$, K je kladne orielntovaný obvod štvorca ohraničený priamkami $x=1$, $x=-1$, $y=1$, $y=-1$, [4]
    b) $P(x,y)=\frac{1}{x}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, $Q(x,y)=\frac{2}{y}\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$, K je hranica oblasti $1\le x^2+y^2\le 4$, $xley\le x\sqrt{3}$ orientovaná kladne. $[(\pi/12)\ln 2]$
    c) $P(x,y)=e^x\sin y-16y$, $Q(x,y)=e^x\cos y-16$, K je polkružnica $x^2+y^2=2x$, $y\ge 0$ s počiatočným bodom $[2,0]$ a koncovým bodom $[0,0]$. $[8\pi]$
    d) $P(x,y)=(1+xy)e^{xy}$, $Q(x,y)=x^2(1+e^{xy})$, K je kladne orientovaný obvod obdĺžnika s vrcholmi $A=[0,0]$, $B=[2,0]$, $C=[2,1]$, $D=[0,1]$. [4]
    e) $P(x,y)=3-xy-y^3$, $Q(x,y)=x^2-2xy$, K je kladne orientovaný obvod štvorca s vrcholmi $A=[0,0]$, $B=[1,0]$, $C=[1,1]$, $D=[\ ,\ ]$. [3/2]