1. Vypočítajte $\|x\|, \|y\|, \mathrm{d}(\mathbf{x},\mathbf{y})$, ak
   a) $\mathbf{x} = (1,0,2,2), \mathbf{y} = (1,1,-1,1) \in R^4$ $\left[\|\mathbf{x}\| = 3, \|\mathbf{y}\| = 2, \mathrm{d}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sqrt{11}\,\right]$
   b) $\mathbf{x} = (1+i,-i,0,2), (2i,1,1+i,0) \in C^4$ $\left[\sqrt{7}, \sqrt{7}, \sqrt{10}\,\right]$
   c) $\mathbf{x} = (1,1,1,1), \mathbf{y} = (1,1,-1,1) \in R^4$ $\left[2,2,2\,\right]$
   d) $\mathbf{x} = (1+2i,-i,0,2), (2i,1,1+i,-i) \in C^4$ $\left[\sqrt{10}, 2\sqrt{2}, \sqrt{10}\,\right]$
2. Nakreslite v rovine okolie $O_{\frac{1}{2}}(\mathbf{a})$ a $O^\circ_{\frac{1}{2}}(\mathbf{a})$ pre
   a) $\mathbf{a} = (0,0)$ b)$\mathbf{a} = (1,-1)$ c) $\mathbf{a} = (2,0)$
3. Zistite, či je $\mathbf{a}$ hromadný bod množiny $M \subset R^2$, nakreslite množinu M.
   a) $\mathbf{a} = (0,0)$, $M = \{(x,y) \in R^2\colon |x| - |y| \le 1\}$ (áno) b)$\mathbf{a} = (0,0)$, $M = \{(x,y) \in R^2\colon x^2 - y < 0\}$ (áno)
   c) $\mathbf{a} = (0,0)$, $M = \{(x,y) \in R^2\colon y > \frac{1}{x}\}$ (áno).
4. Určte definičný obor $D(f)$ funkcie $f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$, nakreslite ho rozhodnite, či je bod $\mathbf{a}$ hromadný bod alebo vnútorný bod $D(f)$, ak
   a) $\mathbf{a} = (3,0)$ (hrom., nie vn.) b) $\mathbf{a} = (0,0)$ (hrom. aj vn.) c) $\mathbf{a} = (3,3)$ (ani hrom., ani vn.)
   d) Nájdite v R^2 bod, ktorý je vnútorný ale nie je hromadný bod množiny $D(f)$
5. Ukážte, že funkcia $f\colon R^2 \to R$, $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{pre } (x,y) \ne (0,0) \\ 0 & \text{pre } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ nie je spojitá v bode $(0,0)$
6. Vypočítajte derivácie funkcie f
   a. $f(x,y) = xy^2 - x^2 y + \sqrt{x^2 + y^2}$. $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f(1,0)}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}}(1,0)$ pre $\mathbf{e} = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.
   b. $f(x,y) = x^3\sqrt{y} - \frac{3y}{\sqrt{x}}$. $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f(1,1)}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}}(1,1)$ pre $\mathbf{e} = \frac{\mathbf{f}}{\|\mathbf{f}\|}$, kde $\mathbf{f} = (1,1)$
   c. $f(x,y,z) = x\sin(x + 2y - z)$. $\frac{\partial f(\pi/2,\pi/2,0)}{\partial x}$, $\frac{\partial f(\pi/2,\pi/2,0)}{\partial y}$, $\frac{\partial f(\pi/2,\pi/2,0)}{\partial z}$, $\frac{\partial f(\pi/2,\pi/2,0)}{\partial \mathbf{e}}$ ak $\mathbf{e} = \frac{\mathbf{f}}{\|\mathbf{f}\|}$, $\mathbf{f} = (1,2,2)$.
7. Nájdite lokálne extrémy funkcie.
   a. $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$,
   b. $f(x,y) = xy\ln(x^2 + y^2)$,
   c. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x + y + zy - z$,
   d. $f(x,y) = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$,
   e. $f(x,y) = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$,
   f. $f(x,y) = x^3 + y^3 - xy - x - y + 2$,
   g. $f(x,y) = xy(2 - x - y)$,
   h. $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}(2y^2 + x^2)$,
   i. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + 2z + x$,
   j. $f(x,y,z) = 6x^2 + 5y^2 + 145z^2 + 4xy - 8xz + 2yz + 1$,
   k. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 18xy + 215$,
   l. $f(x,y,z) = x^3 + 3x^2 + y^2 + z^2 + 12xy + 15x + 14y - 4z + 17$,
   m. $f(x,y) = e^{x+y}\big(2x^2 - xy + \frac{y^2}{3} - 5x + \frac{5y}{3} + \frac{10}{3}\big)$.
8. Nájdite viazané extrémy funkcie f
   a. $f(x,y) = xy - x + y - 1$ s väzbou $x + y - 1 = 0$,
   b. $f(x,y) = x + y$ s väzbou $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{4} = 0$,
   c. $f(x,y) = x^2 + y^2$ s väzbou $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} - 1 = 0$,
   d. $f(x,y,z) = x + y + z$ s väzbou $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{1}{z} - 1 = 0$,
   e. $f(x,y,z) = xyz$ s väzbami $x + y + z - 5 = 0$, $xy + yz + xz - 8 = 0$
9. Nájdite najmenšiu a najväčšiu hodnotu funkcie f na (uzavretej ohraničenej) množine M.
   a. $f(x,y) = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1$ $M = \{(x,y) \in R^2\colon x \ge 0,\ y \ge 0,\ y \le 3 - x\}$,
   b. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ M je obdĺžnik s vrcholmi $A = [0,-1]$, $B = [2,-1]$, $C = [2,2]$, $D = [0,2]$,
   c. $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$ $M = \{(x,y)\colon |x| + |y| \le 1$,
   d. $f(x,y,z) = x + y + z$ $M = \{(x,y,z)\colon 1 \ge x \ge y^2 + z^2\}$,
   e. $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}(2x^2 + 2y^2$ $M = \{(x,y)\colon x^2 + y^2 \le 4\}$.

Dvojné a trojné integrály.

1. Vypočítajte $\int\limits_A f(x,y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$. Oblasť A najprv znázornite.
   a. $f(x,y)=x^2y\cos(xy^2)$, $A=\langle 0,\frac{\pi}{2}\rangle\times\langle 0,2\rangle$, $[-\frac{\pi}{16}]$
   b. $f(x,y)=ye^{x+y}$, $A=\langle 0,2\rangle\times\langle 0,1\rangle$, $[e^2-1]$
   c. $f(x,y)=(1+x^2+y^2)^{-3/2}$, $A=\langle 0,1\rangle\times\langle 0,1\rangle$, $[1/\sqrt{2}]$
   d. $f(x,y)=\ln(1+x)^{2y}$, $A=\langle 0,1\rangle\times\langle 0,1\rangle$, $[2\ln 2-1]$
   e. $f(x,y)=\frac{x^2}{y^2}$, $A=\{(x,y)\colon 0\le\frac{1}{x}\le y\le x\le 2\}$, $[\frac{9}{4}]$
   f. $f(x,y)=3x^2+2y$, $A=\{(x,y)\colon x^2\le y\le\sqrt{x}\}$, $[39/70]$.
   g. $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$, $A=\{(x,y)\colon x^2+y^2\le 1, x\ge 0, y\ge 0\}$, $[\pi/6]$
   h. $f(x,y)=1-2x-3y$, $A=\{(x,y)\colon x^2+y^2\le 2\}$, $[2\pi]$
   i. $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$, $A=\{(x,y)\colon x^2+y^2\le x\}$, $[\frac{1}{3}(\pi-\frac{4}{3})]$

2. Vypočítajte $\int\limits_A f(x,y,z)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z$. Oblasť A najprv znázornite.
   a. $f(x,y,z)=(1-x)yz$, $A=\{(x,y,z)\colon x\ge 0, y\ge 0, 0\le z\le 1-x-y\}$, $[1/144]$
   b. $f(x,y,z)=z$, $A=\{(x,y,z)\colon \sqrt{x^2+y^2}\le z\le\sqrt{2-x^2-y^2}\}$, $[\pi/8]$
   c. $f(x,y,z)=z^2$, $A=\{(x,y,z)\colon x\ge 0, y\ge 0, \sqrt{x^2+y^2}\le z\le\sqrt{2-x^2-y^2}\}$, $[\frac{\pi}{15}(2\sqrt{2}-1)]$
   d. $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$, $A=\{(x,y,z)\colon x^2+y^2\le z^2, x^2+y^2+z^2\le 4\}$, $[2^5\pi\frac{2-\sqrt{2}}{5}]$
   e. $f(x,y,z)=x^2+y^2$, $A=\{(x,y,z)\colon x^2+y^2\le 2z, z\le 2\}$, $[16\pi/3]$
   f. $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $A=\{(x,y,z)\colon x^2+y^2+z^2\le z\}$, $[\pi/10]$