10 Konformné zobrazenie.

Definícia. Nech $A \subset C$ je oblasť v komplexnej rovine. Zobrazenie $f\colon A \to C$ sa nazýva konformné v bode $a \in A$, ak zachováva veľkosť a orientáciu uhlov medzi ľubovoľnými dvoma hladkými krivkami, ktoré sa pretínajú v bode a. Ak je f konformné v každom bode $a \in A$, tak sa nazýva konformné (v oblasti A).

Veta. *Nech $A \subset C$ je oblasť. Ak $f\colon A \to C$, $a \in A$ a $\exists f'(a) \neq 0$, tak je zobrazenie f konformné v bode a.*

Jednoduchým príkladom konformného zobrazenia je lineárna lomená funkcia:

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad , a, b, c, d \in C, \quad bc - ad \neq 0, \ c \neq 0.$$

Rozšírenou priamkou budeme nazývať priamku zjednotenú z bodom ∞. Zovšeobecnennou kružnicou rozumieme kružnnicu alebo priamku, zovšeobecneným kruhom rozumieme vonkajšok alebo vnútro kružnice ako aj ľubovoľnú polrovinu.

Veta. *Lineárne lomené zobrazenie $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $bc - ad \neq 0$, $c \neq 0$. zobrazuje*
  a. rozšírenú priamku alebo kružnicu prechádzajúcu bodom $-\frac{d}{z}$ na rozšírenú priamku.
  b. rozšírenú priamku alebo kružnicu neprechádzajúcu bodom $-\frac{d}{z}$ na kružnicu.

Veta. *Každé konformné zobrazenie otvoreného zovšeobecneného kruhu na kruh je lineárne alebo lineéarne lomené. Hranica zovšeobecneného kruhu sa pritom zobrazí na hranicu obrazu a zachová sa aj orientácia hranice vzhľadom na vnútro kruhu.*

Veta. *Nech $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ je lineárne lomené zobrazenie. Ak $z_1, z_2, z_3, z_4 \in C^*$ sú navzájom rôzne body a $f(z_1) = w_1$, $f(z_2) = w_2$, $f(z_3) = w_3$, $f(z_4) = w_4$, tak*

$$\frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_3 - z_2)} = \frac{(w_1 - w_2)(w_3 - w_4)}{(w_1 - w_4)(w_3 - w_2)}$$

Príklad.
1. Dokážte predchádzajúcu vetu (návod: stačí od pravej strany dosadiť za w_k $f(z_k) = \frac{az_k+b}{cz_k+d}$, $k = 1, 2, 3, 4$).
2. Nájdite lineárne lomené zobrazenie $f(z)$, pre ktoré:
   a. $f(i) = -1$, $f(1+i) = i$, $f(1) = \infty$. $[\frac{(i-2)z+2+i}{z-1}]$
   b. $f(-1) = i$, $f(i) = 1+i$, $f(\infty) = 1$. $[\frac{z+2+i}{z+2-i}]$
   c. $f(-i) = 0$, $f(0) = \frac{1}{2}(1-i)$, $f(-i) = 0$. $[\frac{iz-1}{2z+i+1}]$
   d. $f(-1) = -\frac{1}{2}i$, $f(i) = \frac{1}{2}(-1+i)$, $f(2) = i$. $[\frac{i}{z-1}]$
   e. $f(i) = -\frac{1}{3}$, $f(-2i) = \infty$, $f(\infty) = 2$. $[\frac{2z-i}{z+2i}]$
3. Nájdite lineárne lomené zobrazenie $f(z)$, ktoré zobrazí
   a. $\{z \in C\colon \operatorname{Re} z > 1\} \to \{z \in C\colon |z-2| > 1\}$ $[\frac{z-4}{z-2}]$
   b. $\{z \in C\colon \operatorname{Re} z > 0\} \to \{z \in C\colon \operatorname{Re} z < 0\}$ $[f(z) = -z]$
   c. $\{z \in C\colon \operatorname{Re} z > 0\} \to \{z \in C\colon |z| < 1\}$ $[\frac{z-1}{z+1}]$
   d. $\{z \in C\colon \operatorname{Re} z > 0\} \to \{z \in C\colon |z| > 1\}$ $[\frac{z+1}{z-1}]$
   f. $\{z \in C\colon |z| < 1\} \to \{z \in C\colon \operatorname{Im} z < 0\}$ $[\frac{iz+1}{z+i}]$
   e. $\{z \in C\colon |z| > 1\} \to \{z \in C\colon \operatorname{Im} z < 0\}$ $[\frac{z+i}{iz+1}]$

11. Princíp maxima modulu.

Najprv uvediem (bez dôkazu) jednu z najdôležitejších viet z teórie analytických funkcií a niektoré jej dôsledky¿

Cauchyho integrálna veta. *Nech $A \subset C$ je oblasť, $K \subset A$ je jednoduchá po častiach hladká krivka a nech aj vnútro krivky K, $\operatorname{int} K \subset A$. Potom pre každú analytickú funkciu $f\colon A \to A$ platí*

$$\oint_K f(z)\,\mathrm{d}\,z = 0\,.$$

Cauchyho integrálna veta na viacnásobne súvislej oblasti. *Nech $A \subset C$ je oblasť, $K \subset A$, $K_p \subset A$, $p = 1, 2, \ldots, n$, sú jednoduché po častiach hladké kladne orientované krivky také, že $(\operatorname{int} K_p \cup K_p) \subset \operatorname{int} K$ pre $\forall p = 1, \ldots, n$, $(\operatorname{int} K_p \cup K_p) \subset (\operatorname{ext} K_q \cup K_q)$, ak $p \neq q$ a*

$$\operatorname{int} K \cap \Big(\operatorname{ext} K_1 \cup \operatorname{ext} K_2 \cup \cdots \cup \operatorname{ext} K_n\Big) \subset A\,.$$

Potom pre každú analytickú funkciu $f\colon A \to A$ platí

$$\oint_K f(z)\,\mathrm{d}\,z = \sum_{p=1}^{n} \oint_{K_p} f(z)\,\mathrm{d}\,z\,.$$

Pre $n = 1$ z predchádzajúcej vety vyplýva:

Cauchyho integrálny vzorec. *Nech $A \subset C$ je oblasť, $K \subset A$ je jednoduchá po častiach hladká kladne orientovaná krivka a nech aj $\operatorname{int} K \subset A$. Potom pre každú analytickú funkciu $f\colon A \to A$ a každý bod $a \in \operatorname{int} K$ platí*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_K \frac{f(z)}{z-a}\, \mathrm{d}\, z\,.$$

A napokon z C. int. vzorca vyplýva:

Princíp maxima modulu. *Nech $A \subset C$ je oblasť a $f\colon A \to C$ je nekonštantná analytická funkcia. Potom funkcia $|f(z)|$ nemá v oblasti A lokálne maximum.*

Princíp maxima zaručuje, že maximum absolútnej hodnoty ohraničenej analytickej funkcie f v oblasti A sa rovná maximu $|f(z)|$ na hranici A. V prípade, že f nemá v A nulové body je aj $\frac{1}{f}$ analytická funkcia a potom sa aj minimum funkcie $|f(z)|$ v oblasti A rovná minimu na hranici (nadobúda sa v tom bode, kde .má $\left|\frac{1}{f(z)}\right|$ maximum).

Príklady.

1. Ukážte, že funkcia f je analytická v oblasti M a určte $\max\limits_M |f(z)|$, ak
   a. $M = \{z \in C\colon\ \operatorname{Re} z \le 0\}$, $f(z) = \frac{e^z}{z-1}$ [1]
   b. $M = \{z \in C\colon 0 \le \operatorname{Re} z \le 1\}$, $f(z) = \frac{2}{z-2}$ [2]
   c. $M = \{z \in C\colon\ \operatorname{Re} z \ge 1\}$, $f(z) = \frac{2}{z^2+1}$ [1]
   d. $M = \{z \in C\colon 1 \le \operatorname{Re} z \le 5\}$, $f(z) = \frac{1}{z^2+z}$ [1/2]
2. Určte $\max\limits_M |f(z)|$ $\min\limits_M |f(z)|$, ak
   a. $M = \{z \in C\colon |z| \le 2\}$, $f(z) = z^2 + 5$ [1, 9]
   b. $M = \{z \in C\colon |z| \le 4\}$, $f(z) = z^2 + 10$ [0, 26]
   c. M je trojuholník s vrcholmi $z = 0$, $z = \frac{\pi}{2}$, $z = i\frac{\pi}{2}$; $f(z) = e^z + 4$ [min $= \sqrt{17}$, max $= e^{(\pi/2)} + 4$]
   d. M je obdĺžnik $-1 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $f(z) = z^2 + 4$ [3, 5]

12. Fourierova transformácia.

Ak $f\colon R \to C$ je po častiach spojitá periodická funkcia s periódou T, tak sa dá vyjadriť v tvare komplexného Fourierovho radu:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t}\,, \quad \text{kde } \omega = \frac{2\pi}{T}\,, \quad c_n = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-in\omega t}\, \mathrm{d}\, t\,.$$

Teda k f sa priradí postupnosť Fourierových koeficientov a k nej spätne funckia f:

$$f \to \{c_n\}_{n=-\infty}^{\infty} \to \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t} = f(t)$$

Predlžovaním periódy $T \to \infty$ dostaneme analógiu pre neperiodické funkcie, Fourierovu integrálnu transformáciu.

Hovoríme, že funkcia $f(-\infty, \infty) \to R$ spĺňa Dirichletove podmienky (stručne $f \in (DP)$, ak

1. Na každom konečnom intervale má konečne veľa bodov nespojitosti a konečne veľa lokálnych extrémov.
2. $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, \mathrm{d}\, t < \infty$.

Definícia. Nech $f \in (DP)$. Potom sa funkcia

$$\mathcal{F}\{f(t)\}(\omega) = F(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t}\, \mathrm{d}\, t$$

nazýva Fourierova transformácia (frekvenčné spektrum) funkcie $f(t)$. Spätná Fourierova transformácia je potom

$$g(t) = \frac{1}{2}[\lim_{s\to t-} f(s) + \lim_{s\to t+} f(s)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(i\omega) e^{i\omega t}\, \mathrm{d}\, \omega\,.$$

Príklad. Označme $\eta(t) = \begin{cases} 0\,, & \text{ak } t < 0 \\ 1 & \text{ak } t \ge 0 \end{cases}$. Vypočítame $\mathcal{F}(A[\eta(t+T) - \eta(t-T)]\}$

$$\mathcal{F}([\eta(t+T) - \eta(t-T)]\} = \int_{-T}^{T} e^{-i\omega t}\, \mathrm{d}\, t = \begin{cases} 2T\,, & \omega = 0\,, \\ \frac{i}{\omega}\left[e^{-i\omega t}\right]_{-T}^{T} = 2T\frac{\sin \omega T}{\omega T}\,, & \omega \ne 0 \end{cases}$$

Ak označíme $\operatorname{sinc}(t) = \begin{cases} \frac{\sin t}{t}\,, & t \ne 0 \\ 1\,, & t = 0 \end{cases}$, tak stručne:

$$\mathcal{F}([\eta(t+T) - \eta(t-T)]\} = 2T \operatorname{sinc} \omega T\,.$$

Vlastnosti Fourierovej transformácie:

1. **lineárnosť.** $\mathcal{F}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\}(i\omega) = \alpha F(i\omega) + \beta G(i\omega)$.
2. **derivácia v časovej oblasti.** $\mathcal{F}\left\{\frac{\mathrm{d}^n f(t)}{\mathrm{d}\, t^n}\right\} = (i\omega)^n F(i\omega)$.
3. **posunutie v časovej oblasti.** $\mathcal{F}\{f(t-\tau)\}(i\omega) = e^{-i\omega\tau} F(i\omega)$.
4. **posunutie vo frekvenčnej oblasti.** $\mathcal{F}\{e^{i\omega_0} f(t)\}(i\omega) = F(i(\omega - \omega_0))$.
5. **dualita. Ak** $F(i\omega) = \mathcal{F}(f(t)\}$ **a** $g(t) = F(it)$**, tak** $\mathcal{F}\{g(t)\}(i\omega) = 2\pi f(-\omega)$.

Príklady. Vypočítajte Fourierovu transformáciu funkcie (a, A, T sú dané kaldné čísla).

1. $f(t) = \eta(t)e^{-at}$,
2. $f(t) = e^{-a|t|}$,
3. $f(t) = \begin{cases} A\,, & (-T \le t \le 0) \\ -A\,, & (0 < t \le T) \end{cases}$
3. $f(t) = \begin{cases} (A/T)t + A & (-T \le t \le 0) \\ (-A/T)t + A\,, & (0 < t \le T) \end{cases}$
4. $f(t) = \eta(t)e^{-at}\sin\omega_0 t$
5. $f(t) = \begin{cases} 1 & (1 \le |t| \le 2) \\ 0 & (\text{pre ostatné} \end{cases}$
6. $f(t) = \sin\omega_0 t[\eta(t + \frac{1}{2}T) - \eta(t - \frac{1}{2}T)$
7. Nájdite funkciu $G(i\omega)$, takú, že ak $y(t), u(t)$ spĺňa diferenciálnu rovnicu

(a)
$$\frac{\mathrm{d}^2\, y(t)}{\mathrm{d}\, t^2} + 3\frac{\mathrm{d}\, y(t)}{\mathrm{d}\, t} + 7y(t) = 3\frac{\mathrm{d}\, u(t)}{\mathrm{d}\, t} + 2u(t)\,,$$

(b)
$$\frac{\mathrm{d}^2\, y(t)}{\mathrm{d}\, t^2} + 4\frac{\mathrm{d}\, y(t)}{\mathrm{d}\, t} + 5y(t) = \frac{\mathrm{d}\, u(t)}{\mathrm{d}\, t} - 4u(t)\,,$$

tak $Y(i\omega) = G(i\omega)U(i\omega)$.